Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0662.02.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Юнита 2

ЗАДАЧА КОШИ. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Москва 2002

Разработано В.Н. Арефьевым, кандидатом физ.-мат. наук, профессором

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

КУРС: УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Юнита 1. Метод разделения переменных в уравнениях с частными производными.

Юнита 2. Задача Коши. Краевые задачи для эллиптических уравнений.

ЮНИТА 2

Рассмотрены методы решения задачи Коши для уравнений первого и второго порядков. Изложены основы теории эллиптических краевых задач.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Соответствует профессиональной образовательной программе СГУ № 1

(С) СОВРЕМЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 2000

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН 4
ЛИТЕРАТУРА 5
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ 6
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР 9
Глава I. Задача Коши 9
§1. Интеграл Фурье 10
§2. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом Фурье 13
§3. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности . 18
§4. Преобразование Фурье 21
§5. Применение преобразования Фурье 29
§6. Метод Даламбера решения волнового уравнения 32
§7. Пространственно-временная интерпретация формулы Даламбера 35
§8. Решение смешанной задачи для волнового уравнения на полупрямой 42
§9. Метод характеристик решения уравнений первого порядка 48
§10. Системы уравнений первого порядка 53
§11. Характеристики гиперболических уравнений 58
Глава II. Эллиптические задачи 63
§1. Гармонические функции и их свойства 63
§2. Принцип максимума 70
§3. Функция Грина. Примеры 73
§4. Метод функций Грина решения задачи Дирихле 79
§5. Задачи Дирихле для внешности круга и полуплоскости . . . 84
§6. Элементы теории потенциала 86
§7. Применение потенциалов к решению краевых задач 89
Глава III. Корректность постановки задач математической физики 92
§1. Корректная задача 92
§2. Корректность основных краевых задач математической физики 94
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 95
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ 100
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ 112
ГЛОССАРИЙ*

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Интеграл Фурье. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Метод Фурье. Интеграл Пуассона. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Физический смысл фундаментального решения. Преобразование Фурье. Свойства. Применение преобразования Фурье. Решение смешанной краевой задачи на полупрямой. Задача Коши для волнового уравнения. Метод Даламбера. Формула Даламбера. Пространственно-временная интерпретация формулы Даламбера. Решение смешанной задачи для волнового уравнения на полупрямой. Линейные уравнения первого порядка. Метод характеристик. Системы уравнений первого порядка. Характеристики гиперболических уравнений.

Эллиптические краевые задачи. Гармонические функции и их свойства (теорема о среднем, неравенство Харнака. теорема Лиувилля). Принцип максимума. Теорема о единственности решения задачи Дирихле. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Дирихле от граничных условий. Функция Грина. Функции Грина для круга, шара, полуплоскости и полупространства. Метод функций Грина решения задачи Дирихле. Интегральные формулы Пуассона для круга, полуплоскости и внешности круга. Элементы теории потенциала. Ньютоновы потенциалы и логарифмические потенциалы. Физический смысл потенциалов. Применение потенциалов к решению краевых задач.

Корректность постановки задач математической физики. Некорректно поставленные задачи. Пример Адамара.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М., 1969.

Дополнительная

2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., 1961.

3. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1972.

4. Годунов С.К. Уравнения математической физики., М. 1977.

5. Кошляков И.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.

6. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М., 1985.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 2. М., 1998.

8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., 1985.

9. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. М., 1974.

10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. М., 1997.

11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., 1967.

Примечание. При написании тематического обзора были использованы все источники.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умения	Алгоритмы
1	Решить методом Фурье задачу Коши для уравнения теплопроводности	1. Методом Фурье провести разделение переменных в уравнении теплопроводности. 2. Решить первое уравнение с переменной t, отбросив при этом те решения, которые неограниченно возрастают при $t \to \infty$. 3. Решить второе уравнение с переменной x. 4. Составить общее решение уравнения с частными производными в виде несобственного интеграла по параметру λ. 5. Подставив в общее решение начальное условие, найти неизвестные функции. 6. Выписать решение задачи Коши, подставив найденные функции.
2	Решить методом Даламбера задачу Коши для волнового уравнения	1. Выписать общее решение волнового уравнения. 2. Полагая $t = 0$, подставить в общее решение первое начальное условие. 3. Записать производную общего решения и подставить второе начальное условие. 4. Проинтегрировать полученное равенство. 5. Записать систему уравнений для неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и решить ее. 6. Заменить в полученных формулах x на $(x - at)$ и на $(x + at)$ соответственно и, подставив выражения в общее решение, получить формулу Даламбера.

№ п/п	Умения	Алгоритмы
3	Решить методом характеристик задачу Коши для уравнения первого порядка	1. Составить уравнения характеристик. 2. Решить уравнения характеристик. 3. Определить постоянные интегрирования из начальных условий и записать формулы преобразования переменных. 4. Свести задачу Коши для уравнения с частными производными к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с помощью характеристической замены. 5. Решить полученную задачу. 6. Сделать обратное преобразование.
4	Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге	1. Записать уравнение Лапласа в полярных координатах (r,φ). 2. Методом Фурье провести разделение переменных в уравнении Лапласа. 3. Решить дифференциальное уравнение по φ и учитывая периодичность решений получить целочисленные значения параметра. 4. Подставив полученные значения параметра в уравнение по r, решить это уравнение, при этом отбросить те решения, которые неограниченно возрастают при $r \to 0$. 5. Составить общее решение уравнения Лапласа в виде функционального ряда. 6. Подставив в общее решение граничное условие, найти коэффициенты ряда. 7. Выписать решение задачи Дирихле, подставив найденные коэффициенты.

№ п/п	Умения	Алгоритмы
		8. Вычислить приближенно значение решения, взяв несколько членов ряда и подставив значения переменных
5	Решить с помощью интегральной формулы Пуассона задачу Дирихле в полуплоскости	1. Выписать формулу Пуассона для полуплоскости и подставить граничное значение. 2. Провести интегрирование. 3. Вычислить приближенно значение решения, подставив значения переменных.

ГЛАВА I. ЗАДАЧА КОШИ

При решении задачи Коши для уравнений математической физики нам понадобятся некоторые дополнительные сведения из теории функций действительного и комплексного переменного. Напомним известные понятия и дадим определения новых понятий.

Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$ в интервале $[a,\infty)$ и проинтегрируем ее на отрезке $[a,l]$, где l – произвольное число, большее a. Тогда интеграл $J(l) = \int_a^l f(x)dx$ будет зависеть от l, то есть $J(l)$ – функция верхнего предела интегрирования l. Предположим, что $l \to \infty$. Возникает интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$, который называется несобственным. При этом могут быть два случая: 1) $\lim_{l\to\infty} J(l) = J$ – существует и конечен, либо 2) $\lim_{l\to\infty} J(l)$ не существует или бесконечен.

В первом случае несобственный интеграл называется сходящимся, во втором – расходящимся. Аналогично, если функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей прямой, то можно рассмотреть несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Если оба интеграла в правой части равенства сходятся, то интеграл в левой части называется сходящимся. Если хотя бы один из интегралов справа расходится, то интеграл слева называется расходящимся.

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$. В дальнейшем будут

часто встречаться интегралы, зависящие от параметра λ: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\lambda)dx$,

причем λ может принимать действительные или комплексные значения. Если $f(x,\lambda)$ – непрерывная функция от x и λ, при всех значениях x и λ выполняется неравенство $|f(x,\lambda)| \le \varphi(x)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$ – сходится, то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\lambda)dx$ абсолютно сходится и является непрерывной функцией от параметра λ.

§1. Интеграл Фурье

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на всей прямой. Пусть несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = J < \infty$. Если дополнительно предположить, что на каждом конечном отрезке $[-l;l]$ функция $f(x)$ имеет конечное число точек экстремума, то она будет разлагаться в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt$, $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}tdt$, $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}tdt$. В формулах коэффициентов Фурье переменную интегрирования мы специально обозначили буквой t, чтобы при подстановке этих выражений в ряд Фурье не путать переменную x с переменной интегрирования. После такой подстановки получим

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\frac{\pi n}{l}t\cdot\cos\frac{\pi n}{l}x+\sin\frac{\pi n}{l}t\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\right]dt.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках под интегралом в правой части последнего равенства, можно упростить, воспользовавшись тригонометрической формулой:

$$\cos\frac{\pi n}{l}t\cdot\cos\frac{\pi n}{l}x+\sin\frac{\pi n}{l}t\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x=\cos\frac{\pi n}{l}(t-x).$$

В результате будем иметь

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt. \qquad (71)$$

По теореме Дирихле (см. юниту 1 гл.1, §1) равенство (71) выполняется при всех $x\in[-l;l]$ для произвольного $l>0$. Исследуем вопрос о том, какой вид примет формула (71) при переходе к пределу при $l\to\infty$. Первый член в правой части (71) при $l\to\infty$ будет стремиться к нулю, так как

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\right|\le\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|dt\le\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=\frac{1}{2l}J\underset{l\to\infty}{\to}0.$$

Второй член при $l\to\infty$ стремится к интегралу следующего вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt\underset{l\to\infty}{\to}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt.$$

Доказательство этого факта мы приводить не будем.

Следовательно, формула (71) преобразуется в формулу

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)dt. \qquad (72)$$

Интеграл, стоящий в правой части (72) называется **интегралом Фурье**. Равенство (72) выполняется при всех $x\in(-\infty,\infty)$. Таким образом, непериодическую функцию, заданную на всей прямой, можно представить в виде интеграла Фурье (72). Конечно, чтобы равенство (72) выполнялось всюду, функция $f(x)$ должна удовлетворять

* Нумерация формул и рисунков в юнитах 1 и 2 сплошная.

некоторым условиям. Например, таким, которые сформулированы в начале параграфа. Заметим, что в общем случае в формуле (72) менять порядок интегрирования нельзя. Сначала надо интегрировать функцию $f(t)\cos\alpha(t-x)$ по переменной t, а затем по переменной α, причем оба интеграла несобственные. Очень часто формулу (72) переписывают по-другому:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(t)[\cos\alpha t\cos\alpha x+\sin\alpha t\sin\alpha x]dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt\right)\cos\alpha x d\alpha+\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt\right)\sin\alpha x d\alpha.$$

Если обозначить через

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt \text{ и } b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt, \qquad (73)$$

то (72) окончательно примет следующий вид:

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(\alpha)\cos\alpha x d\alpha+\int_0^{\infty}b(\alpha)\sin\alpha x d\alpha. \qquad (74)$$

Формулы (74) и (73) имеют много общего с тригонометрическим рядом и коэффициентами Фурье. В самом деле, формула (74) означает, что функция $f(x)$ разложена по косинусам и синусам, но только не в ряд по $n(n=0,1,2,...)$, а в интеграл по переменной $\alpha(\alpha\in(0,\infty))$. Коэффициенты Фурье вычислялись интегрированием по отрезку $[-l,l]$, а коэффициенты $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ находятся через несобственные интегралы от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, интеграл Фурье – аналог разложения функции в ряд Фурье, если функция $f(t)$ непериодическая.

Для четных и нечетных функций интеграл Фурье (так же, как и ряд Фурье) можно переписать по-другому. Если $y=f(x)$ – четная функция, то

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,$$
$$b(\alpha)=0. \qquad (75)$$

Значит,

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}a(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha \qquad (76)$$

Если $y=f(x)$ – нечетная функция, то $a(\alpha)=0$,

$$b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt. \qquad (77)$$

Отсюда

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}b(\alpha)\sin\alpha x\,dx \qquad (78)$$

В случае, когда функция $y=f(x)$ задана только на полупрямой $[0,\infty)$, ее можно представить в виде **интеграла Фурье по косинусам** (76) или **по синусам** (78), если продолжить в интервал $(-\infty,0)$, соответственно, четным или нечетным образом. При этом коэффициенты $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ вычисляются по формулам (75) и (77).

§2. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности методом Фурье

Метод Фурье позволяет решать различные задачи математической физики. В юните 1 в гл. IV этим методом были решены краевые задачи для уравнения теплопроводности и волнового уравнения, рассматриваемые на конечном отрезке, а также задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Метод разделения переменных применим не только к задачам, рассматриваемым в ограниченных областях, но также в неограниченных областях или во всем пространстве (в частности, на прямой). В гл. IV, §4, методом Фурье была решена внешняя задача Дирихле для круга. Сейчас мы решим задачу Коши для (одномерного) уравнения теплопроводности. Рассмотрим уравнение

$$U_t = U_{xx},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0, \qquad (79)$$

и начальное условие

$$U(x,0) = \varphi(x),\ -\infty < x < \infty. \qquad (80)$$

ШАГ 1. Будем искать решение уравнения (79) в виде $U(x,t) = X(x)\cdot T(t)$. Найдем частные производные и подставим их в уравнение:

$$U_t = X\cdot T',\ U_x = X'\cdot T,\ U_{xx} = X''\cdot T \Rightarrow$$

$$X\cdot T' = X''\cdot T.$$

Разделим переменные:

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,\ (\lambda \text{ – произвольная постоянная})$$

или а) $T' + \lambda T = 0$,

б) $X'' + \lambda X = 0$.

ШАГ 2. Решим первое уравнение а):

$$T' + \lambda T = 0,\ \ \frac{dT}{T} + \lambda dt = 0 \Rightarrow \ln|T| = -\lambda t + C \Rightarrow T = C_1 e^{-\lambda t},\ \ C_1 -$$

произвольная постоянная.

Общее решение содержит произвольную постоянную λ. В зависимости от значений λ при $t \to \infty$ функция $T(t)$ по абсолютной величине либо неограниченно возрастает, либо постоянная, либо стремится к нулю. В дальнейшем будем рассматривать только решения, стремящиеся к нулю при $t \to \infty$. Они получаются при $\lambda > 0$. Эти решения соответствуют также и физическому смыслу задачи: если $U(x,t)$ – температура материальной среды в точке x, то при $t \to \infty$ она не может неограниченно возрастать.

ШАГ 3. Решим второе уравнение б), учитывая, что $\lambda > 0$. Пусть $\lambda = \alpha^2, \alpha > 0$. Тогда

$$X'' + \alpha^2 X = 0, r^2 + \alpha^2 = 0, r_{1,2} = \pm\alpha i, X_1 = \cos\alpha x, X_2 = \sin\alpha x$$

$$\Rightarrow X = C_2\cos\alpha x + C_3\sin\alpha x,\ C_2, C_3 \text{ – произвольные постоянные.}$$

ШАГ 4. Выпишем частные решения уравнения (79):

$$U(x,t) = X(x)\cdot T(t) = (A\cos\alpha x + B\sin\alpha x)e^{-\alpha^2 t}, \qquad (81)$$

где $A = C_1C_2$ и $B = C_1C_3$.

Функция (81) является решением уравнения (79) при любом фиксированном значении $\alpha > 0$, и мы можем для каждого значения α выбирать разные постоянные A и B. Это означает, что A и B могут быть произвольными функциями от α: $A = A(\alpha), B = B(\alpha)$. Так что окончательно имеем семейство частных решений уравнения (79):

$$U_\alpha(x,t) = (A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x)e^{-\alpha^2 t}, \qquad (82)$$

зависящее от параметра $\alpha \in (0,\infty)$.

Теперь мы воспользуемся свойством линейных однородных уравнений с частными производными, которое не было сформулировано в первой юните. Оказывается, что, если функция $U_\alpha(x,t)$ – решение линейного однородного уравнения, например, уравнения (79), и $C(\alpha)$ – произвольная функция переменной α, то функция

$$U(x,t) = \int_0^\infty C(\alpha)U_\alpha(x,t)d\alpha \qquad (83)$$

также будет решением уравнения. Доказать это несложно, если предположить, что в формуле (83) можно вычислять частные производные по x и t по следующему правилу:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_0^\infty C(\alpha)\frac{\partial U_\alpha}{\partial x}d\alpha, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_0^\infty C(\alpha)\frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x^2}d\alpha, \frac{\partial U}{\partial t} = \int_0^\infty C(\alpha)\frac{\partial U_\alpha}{\partial t}d\alpha. \qquad (84)$$

Вопрос о том, когда можно это делать, мы не будем изучать подробно, а скажем только, что для функций (82), когда $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ ограничены, такие действия возможны. После подстановки производных (84) в уравнение (79) получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int_0^\infty C(\alpha)\left[\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_\alpha}{\partial x^2}\right]d\alpha \equiv 0,$$ что и требовалось доказать.

Таким образом, при $C(\alpha) \equiv 1$ функция

$$U(x,t)=\int_0^\infty U_\alpha(x,t)d\alpha=\int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x e^{-\alpha^2 t}d\alpha+\int_0^\infty B(\alpha)\sin\alpha x e^{-\alpha^2 t}d\alpha \quad (85)$$

является решением уравнения (79).

ШАГ 5. Нам остается теперь только подобрать неизвестные функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ так, чтобы решение (85) удовлетворяло начальному условию (80):

$$U(x,0)\equiv\int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x d\alpha+\int_0^\infty B(\alpha)\sin\alpha x d\alpha=\varphi(x). \quad (86)$$

Равенство (86) означает, что начальная функция $\varphi(x)$ представлена в виде интеграла Фурье. Если предположить, что функция $\varphi(x)$ в (80) непрерывная, имеет конечное число экстремумов на каждом отрезке $[-l,l]$ и абсолютно интегрируемая на прямой, то разложение (86) возможно и коэффициенты $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ вычисляются по формулам (73):

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\alpha\xi d\xi \text{ и } B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\alpha\xi d\xi. \quad (87)$$

Вычислив коэффициенты для конкретной начальной функции и подставив их в (85), получим решение задачи Коши (79), (80).

Далее мы займемся преобразованием формулы (85) к более удобному виду. Для этого, во-первых, перепишем (85), предварительно подставив функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ из (87), в следующем виде:

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[\cos\alpha\xi\cos\alpha x+\sin\alpha\xi\sin\alpha x\right]e^{-\alpha^2 t}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\alpha(\xi-x)e^{-\alpha^2 t}d\xi. \quad (88)$$

(Здесь мы воспользовались той же тригонометрической формулой, что и на стр.11). Во-вторых, в интеграле (88) изменим порядок интегрирования. В данном случае это можно сделать, так как при любом $t>0$ функция $e^{-\alpha^2 t}\to 0$ при $\alpha\to\infty$ очень быстро. Поэтому и при другом

порядке интегрирования несобственные интегралы будут сходиться. Получим:

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{0}^{\infty}\cos\alpha(\xi-x)e^{-\alpha^2t}d\alpha\ . \qquad (89)$$

В-третьих, внутренний интеграл в (89) уже не зависит от начальной функции $\varphi(\xi)$ и вычисляется с помощью специальных приемов:

$$\int_{0}^{\infty}\cos\alpha(\xi-x)e^{-\alpha^2t}d\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

В результате формула (85) преобразуется к виду

$$U(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi. \qquad (90)$$

Формула (90) называется **интегральной формулой Пуассона для уравнения теплопроводности** (или короче – формулой Пуассона).

Если уравнение теплопроводности содержит коэффициент a^2: $U_t=a^2U_{xx}$, то решение задачи Коши для такого уравнения можно получить с помощью замены независимой переменной $\tau=a^2t$. Тогда уравнение преобразуется к виду (79):

$$U_t=U_\tau\cdot\tau'=U_\tau\cdot a^2\Rightarrow a^2U_\tau=a^2U_{xx}\Rightarrow U_\tau=U_{xx}.$$

Решение задачи Коши для такого уравнения записывается по формуле (90):

$$U(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi.$$

Возвращаясь к переменной t, получим решение исходной задачи:

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (91)$$

§3. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим функцию, входящую в формулу (90):

$$f_\xi(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}. \qquad (92)$$

Проверим, что при всех значениях ξ она является решением уравнения теплопроводности (79) в области $\{(x,t): x\in(-\infty,\infty), t\in(0,\infty)\}$. Для этого найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial f_\xi}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\cdot\frac{-2(x-\xi)}{4t}=-\frac{(x-\xi)}{4t\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},$$

$$\frac{\partial^2 f_\xi}{\partial x^2}=-\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-\frac{(x-\xi)}{4t\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\cdot\frac{-2(x-\xi)}{4t}=$$

$$=\left[\frac{(x-\xi)^2}{8t^2\sqrt{\pi t}}-\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\right]e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}},$$

$$\frac{\partial f_\xi}{\partial t}=-\frac{1}{4\sqrt{\pi t^3}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\cdot\frac{(x-\xi)^2}{4t^2}=$$

$$=\left[\frac{(x-\xi)^2}{8t^2\sqrt{\pi t}}-\frac{1}{4t\sqrt{\pi t}}\right]e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

Так как выражения, стоящие в квадратных скобках в частных производных $\frac{\partial^2 f_\xi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial f_\xi}{\partial t}$ одинаковые, то после подстановки этих производных в уравнение (79) получим тождество по x и t, что и доказывает наше утверждение. Функция $f_\xi(x,t)$ в (92) называется **фундаментальным решением уравнения теплопроводности**. Она имеет следующий физический смысл.

Предположим, что имеется бесконечно длинный тонкий однородный стержень, температура которого в каждой точке равна 0. Для простоты

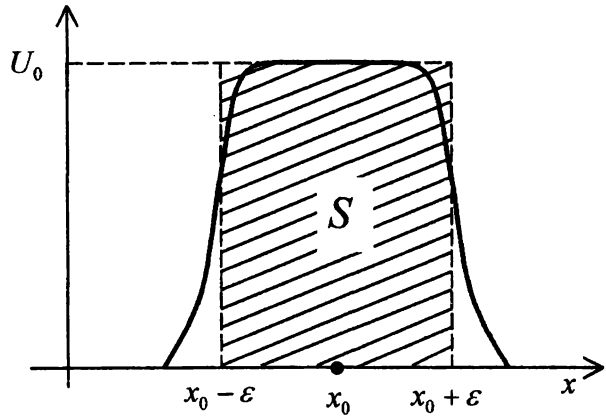


Рис. 13

будем считать, что коэффициент температуропроводности $a=1$. Пусть в начальный момент времени в точке x_0 внезапно введено некоторое количество тепла (например, на мгновение поднесено высокотемпературное пламя). Тогда вблизи этой точки распределение температуры будет выглядеть так, как на рис.13. Без большой погрешности можно считать, что начальная температура отлична от нуля только на отрезке $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$ – мало, причем всюду на этом отрезке она равна некоторой постоянной U_0. Интеграл Пуассона (90) в этом случае будет иметь вид

$$U(x,t)=\frac{U_0}{2\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\,d\xi. \qquad (93)$$

По теореме о среднем значении интеграл в формуле (93) можно записать в виде

$$U(x,t)=\frac{2\varepsilon U_0}{2\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4t}}, \qquad (94)$$

где $\mu\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$. Количество тепла, вводимое в начальный момент в точке x_0, пропорционально заштрихованной на рис.13 площади $S=2\varepsilon U_0$. Будем уменьшать ε, при этом всякий раз вводя такое количество тепла, при котором площадь S будет оставаться постоянной,

равной 1.

В этом случае говорят, что при $\varepsilon \to 0$ в точке x_0 имеется **точечный** (идеальный) **тепловой импульс**. Так как $S = 2\varepsilon U_0 = 1$, то $U_0 = \dfrac{1}{2\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Конечно, понятие точечного теплового импульса является абстрактным. Физически его можно реализовать лишь приближенно, если пламя, о котором шла речь выше, будет очень узким. Для точечного теплового импульса решение (94) превратится в функцию (так как $\mu \to x_0$ при $\varepsilon \to 0$)

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}} \equiv f_{x_0}(x,t),$$

то есть в фундаментальное решение (92) при значении параметра $\xi = x_0$.

Посмотрим теперь, как распространяется тепло в стержне после точечного импульса. Для этого начертим графики фундаментального решения $f_{x_0}(x,t)$ для разных значений $t > 0$ (см. рис.14). Кривые,

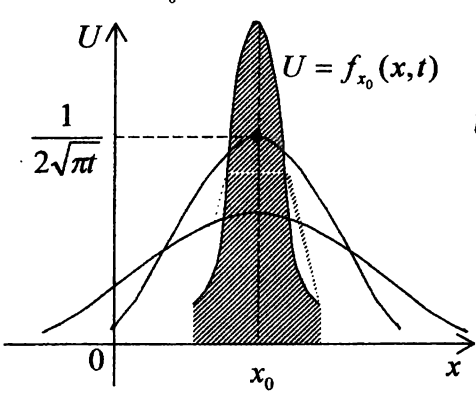


Рис. 14

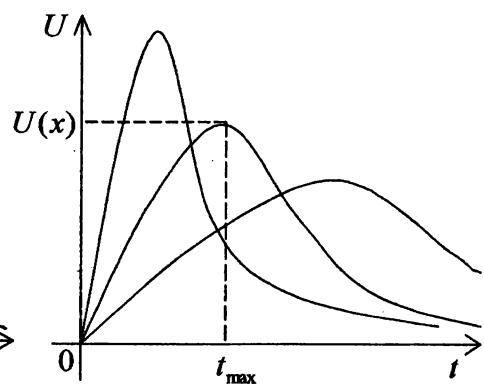


Рис. 15

которые изображены на рисунке, называются **кривыми Гаусса**. Кривая Гаусса симметрична относительно прямой $x = x_0$. Максимум достигается при $x = x_0$ и он равен $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}$, с увеличением t его значение убывает.

Площадь под каждой кривой равна 1. Интересно также сравнить, как меняется температура в фиксированных точках $x \neq x_0$ при $t \to \infty$ (см. рис.15).

В каждой фиксированной точке $x \neq x_0$ функция $f_{x_0}(x,t)$, как функция времени, сначала возрастает от 0 (при $t = 0$) до некоторого максимального значения $U(x)$ при $t = t_{\max}$ и затем монотонно убывает, стремясь к нулю при $t \to \infty$. При $t = 0$ функция $f_{x_0}(x,t)$ не определена, и мы имеем в виду ее предел при $t \to 0$:

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ (x\neq x_0)}} f_{x_0}(x,t) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ (x\neq x_0)}} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)}{4t}} = 0.$$

(этот предел вычисляется по правилу Лопиталя). С удалением точки x от x_0 – точки приложения точечного импульса максимальное значение $U(x)$ уменьшается.

Теперь Вы можете представить себе, как происходит распространение тепла при начальных значениях $\varphi(x)$, заданных во всех точках бесконечного стержня (прямой OX). Температура U в точке x в момент времени t, вычисляемая по формуле (90), есть результат наложения (суперпозиции) температур, возникающих в этой точке в момент времени t вследствие непрерывно распределенных по стержню тепловых импульсов "интенсивности" $\varphi(\xi)$ в точке ξ, приложенных в момент $t = 0$. Такие импульсы можно приближенно реализовать в виде большого числа языков пламени разной температуры, поднесенных в момент $t = 0$ на очень краткий промежуток времени к стержню так, что в каждой точке ξ стержня мгновенно возникает температура $\varphi(\xi)$ (конечно, это очень приближенная картина, однако она наглядно описывает характер происходящего процесса).

§4. Преобразование Фурье

При решении дифференциальных уравнений с частными производными всегда стараются каким-либо способом уменьшить число независимых переменных. Один из методов – метод разделения

переменных – позволяет от одного уравнения перейти к нескольким уравнениям, но с меньшим числом независимых переменных (в частности, к обыкновенным дифференциальным уравнениям). С этим методом мы уже хорошо знакомы. Другой метод, с которым нам предстоит познакомиться, – метод интегральных преобразований. Он позволяет уменьшить число независимых переменных (по которым проводится дифференцирование), преобразуя некоторые переменные в параметры (по которым уже нет дифференцирования).

Интегральным преобразованием называют преобразование, которое каждой функции $f(x)$ ставит в соответствие новую функцию $F(s)$ по формуле

$$F(s)=\int_a^b K(s,t)f(x)dx.$$

Заметим, что исходная функция зависит от x, а результирующая – от s. Функция $K(s,t)$ называется **ядром преобразования**. Это основной элемент, отличающий одно преобразование от другого. Обычно ядро выбирают так, чтобы преобразование обладало некоторыми заданными свойствами. Пределы интегрирования также зависят от вида преобразования. Если a и b – конечные пределы, то преобразование называется конечным интегральным преобразованием. Сейчас мы будем рассматривать преобразования, в которых пределы интегрирования бесконечные. Существует общая теория интегральных преобразований. Мы же остановимся на конкретном преобразовании – преобразовании Фурье. Но прежде чем определить его и рассмотреть его свойства, отметим один важный момент. Цель всякого преобразования – упростить исходную задачу. Далее эта преобразованная задача решается и, применяя обратное преобразование к ее решению, получают решение исходной задачи. Таким образом, с каждым прямым преобразованием связано **обратное преобразование**, которое должно восстанавливать первоначальную функцию из преобразованной, то есть всегда возникает **пара взаимно обратных преобразований**.

Если функция $f(x)$ определена при $-\infty<x<\infty$, то ее **преобразованием Фурье** $\mathcal{F}[f]$ называется функция $F(s)$, которая определяется по формуле

$$\mathcal{F}[f]=F(s)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixs}dx. \qquad (95)$$

Значит, если у нас есть функция $f(x)$, определенная на вещественной оси, подставляем ее в формулу (95), интегрируем и получаем новую функцию $F(s)$, определенную для $-\infty < s < \infty$. Функцию $F(s)$ часто называют Фурье-образом функции $f(x)$. Отметим, что значения функции $F(s)$ могут быть комплексными, хотя аргумент s – действительный. Обратное преобразование Фурье определяется формулой

$$\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{ixs} ds . \qquad (96)$$

Замечание. При применении преобразования Фурье нельзя забывать об условиях существования этого преобразования. В формуле (95), например, несобственный интеграл будет сходиться, если $f(x)$ – абсолютно интегрируемая функция:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot \left| e^{-ixs} \right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty ,$$

(множитель e^{-ixs} – ограниченная функция при всех x и s, так как $\left| e^{-ixs} \right| = 1$). Однако для того, чтобы было возможно под знаком интеграла выполнять какие-либо действия (например, дифференцировать или умножать на некоторые функции), необходимо накладывать на функцию $f(x)$ дополнительные условия. К сожалению, в данной юните мы не можем подробно исследовать эти трудные вопросы. Поэтому в нашем изложении будет превалировать техническая сторона, в предположении, что все действия вполне обоснованы.

Вообще, существование и область применимости того или иного интегрального преобразования связаны с фундаментальными понятиями разделов математики, которые носят названия функционального анализа и теории функций комплексного переменного.

Свойства преобразования Фурье

Свойство 1. Пара преобразований Фурье (95) и (96) взаимно обратная, то есть для функции $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, выполняется

тождество

$$f(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx \right) ds .$$

Например, $e^{-|x|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+s^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{-|x|}$. Аналогично, для функции $F(s)$, $-\infty < s < \infty$, выполняется тождество

$$F(s) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{ixs} ds \right) dx .$$

Свойство 2. Преобразование Фурье – линейное преобразование, то есть для функций $f(x)$ и $g(x)$, $-\infty < x < \infty$, и для постоянных K_1 и K_2 выполняется равенство

$$\mathcal{F}[K_1 f + K_2 g] = K_1 \mathcal{F}[f] + K_2 \mathcal{F}[g] .$$

Доказательство этого свойства основано на линейности интегралов:

$$\mathcal{F}[K_1 f + K_2 g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [K_1 f + K_2 g] e^{-ixs} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_2 \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ixs} dx =$$

$$= K_1 \mathcal{F}[f] + K_2 \mathcal{F}[g] .$$

Свойство 3. Если функция $f(x,t)$ определена при $-\infty < x < \infty$ и $a < t < b$, то справедливы следующие формулы преобразования частных производных:

$$\mathcal{F}[f_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x,t) e^{-ixs} dx = is \cdot \mathcal{F}[f] , \qquad (97)$$

$$\mathcal{F}[f_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x,t) e^{-ixs} dx = \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{F}[f]) . \qquad (98)$$

Прежде, чем доказать эти формулы, обратим внимание на

следующее обстоятельство: если производная функции вычисляется по той же переменной, по которой проводится преобразование Фурье (см. формулу (97)), то операция дифференцирования преобразуется в умножение Фурье-образа функции на (is). Если дифференцирование проводится по другой переменной (см. формулу (98)), то производная функции переходит в производную Фурье-образа функции.

При доказательстве формулы (97) выполним интегрирование по частям:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x,t)e^{-ixs}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x,t)e^{-ixs}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(is)\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-ixs}dx \,. \quad (99)$$

Внеинтегральный член в (99) равен нулю, так как мы предполагаем, что функция $f(x,t)$ при всех значениях t абсолютно интегрируемая непрерывная функция переменной x и, следовательно, при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ стремится к нулю, а множитель e^{-ixs} – ограниченная функция при всех x и s. Второе слагаемое в (99), как нетрудно заметить, равно $(is)\cdot \mathcal{F}[f]$. Для доказательства формулы (98) достаточно действие дифференцирования вынести за знак интеграла.

Преобразование Фурье обладает еще одним важным свойством. Чтобы его сформулировать, необходимо ввести новую операцию, называемую *сверткой функций*.

Сверткой $(f * g)(x)$ функций $f(x)$ и $g(x)$, $-\infty < x < \infty$, называется функция, определяемая по формуле

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi \,.$$

Если в несобственном интеграле сделать замену переменной $x - \xi = \mu$, то получится другая формула

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)g(x-\mu)d\mu \,,$$

которую тоже можно принять за определение свертки функций.

Свойство 4 (Свойство свертки). Для функций $f(x)$ и $g(x)$, $-\infty < x < \infty$, справедлива формула

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g] \,. \quad (100)$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье от свертки функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\mathcal{F}[f*g]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)g(\xi)d\xi\right)e^{-ixs}dx$$

и поменяем порядок интегрирования:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)e^{-i(x-\xi)s}dx\right)g(\xi)e^{-ixs}d\xi\ . \qquad (101)$$

После замены переменной $x-\xi=t$ во внутреннем интеграле получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)e^{-i(x-\xi)s}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-its}dt\equiv\mathcal{F}[f]\,.$$

Так как преобразование Фурье $\mathcal{F}[f]$ зависит только от s и не зависит от переменной ξ, по которой проводится интегрирование внешнего интеграла в (101), функцию $\mathcal{F}[f]$ можно вынести за знак интеграла. В результате получим

$$\mathcal{F}[f*g]=\mathcal{F}[f]\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)e^{-i\xi s}d\xi=\mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]\,,$$

что и требовалось доказать.

Это свойство часто используется при решении уравнений с частными производными, когда бывает необходимо найти обратное преобразование от произведения двух функций, являющихся Фурье-образами некоторых заданных функций. Применяя обратное преобразование к (100), будем иметь

$$(f*g)(x)=\mathcal{F}^{-1}[\,\mathcal{F}[f]\cdot\mathcal{F}[g]]\,.$$

Следовательно, для определения обратного преобразования от произведения Фурье-образов, надо найти прообразы каждого из сомножителей, то есть функции $f(x)$ и $g(x)$, а затем вычислить их свертку.

На самом деле, с преобразованием Фурье (и с обратным преобразованием Фурье) Вы уже встречались в §1. Рассмотрим интеграл Фурье (74)

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha+\int_0^{\infty}b(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha,$$

где $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ вычисляются по формулам (73):

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,\ b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Представим интеграл Фурье в комплексной форме. Для этого, используя формулу Эйлера

$$e^{i\gamma}=\cos\gamma+i\sin\gamma,$$

заменим $\cos\alpha x$ и $\sin\alpha x$ на выражения

$$\cos\alpha x=\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2},\ \sin\alpha x=\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}.$$

Получим

$$f(x)=\int_0^{\infty}a(\alpha)\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}d\alpha+\int_0^{\infty}b(\alpha)\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[a(\alpha)-ib(\alpha)]e^{i\alpha x}d\alpha+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[a(\alpha)+ib(\alpha)]e^{-i\alpha x}d\alpha. \qquad (102)$$

Как следует из формул (73), функции $[a(\alpha)-ib(\alpha)]$ и $[a(\alpha)+ib(\alpha)]$ можно переписать с помощью формулы Эйлера в виде:

$$[a(\alpha)-ib(\alpha)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)[\cos\alpha t-i\sin\alpha t]dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt,$$

$$[a(\alpha)+ib(\alpha)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)[\cos\alpha t+i\sin\alpha t]dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt.$$

После подстановки этих выражений в интегралы (102) будем иметь

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt\right)e^{i\alpha x}d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha t}dt\right)e^{-i\alpha x}d\alpha. \qquad (103)$$

Во втором слагаемом в (103) сделаем замену переменной $\alpha = -\beta$ и получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt\right)e^{-i\alpha x}d\alpha = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{-\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\beta t}dt\right)e^{i\beta x}d\beta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\beta t}dt\right)e^{i\beta x}d\beta .$$

Ясно, что если в последнем интеграле переменную интегрирования β обозначить прежней буквой α, то формула (103) окончательно примет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt\right)e^{i\alpha x}d\alpha . \qquad (104)$$

Введем обозначение

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt .$$

Это интегральное преобразование является преобразованием Фурье функции $f(t)$. Тогда интеграл Фурье (104)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$$

есть не что иное, как обратное преобразование Фурье, а сама формула (104) совпадает с формулой из свойства 1. Тем самым рассуждения, проведенные выше при преобразовании интеграла Фурье, можно считать доказательством свойства 1.

В §1 фактически рассматривались и другие интегральные преобразования. Формулы (75) и (76) задают пару интегральных преобразований, которые называются косинус-преобразованиями Фурье (прямым и обратным), а формулы (77) и (78) – синус-преобразованиями Фурье (прямым и обратным). Эти преобразования так же, как и преобразование Фурье, часто применяются в уравнениях математической физики.

§5. Применение преобразования Фурье

В этом параграфе мы, как и в §2, рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$U_t = U_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$U(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty,$$

и решим ее с помощью преобразования Фурье.

ШАГ 1. Сделаем преобразование Фурье в уравнении и в начальном условии по переменной x:

$$\mathcal{F}[U_t] = \mathcal{F}[U_{xx}], \quad \mathcal{F}[U(x,0)] = \mathcal{F}[\varphi(x)].$$

Воспользуемся свойствами преобразования Фурье и получим:

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = -s^2 V_s(t), \; V_s(0) = \Phi(s), \qquad (105)$$

где $V_s(t)$ – Фурье-образ функции $U(x,t)$, $\Phi(s)$ – Фурье-образ функции $\varphi(x)$, s – параметр, $-\infty < s < \infty$. Заметим, что функция V_s на самом деле зависит не только от t, но и от s, но поскольку в дифференциальном уравнении в (105) нет дифференцирования по s (s играет роль постоянного параметра), мы не записываем s в число аргументов.

ШАГ 2. Так как уравнение в (105) – обыкновенное дифференциальное уравнение, то задача (105) – задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Она легко решается:

$$\frac{dV_s}{dt} = -s^2 V_s, \int \frac{dV_s}{V_s} = -s^2 \int dt, \; \ln|V_s| = -s^2 t + C \Rightarrow V_s = C_1 e^{-s^2 t}.$$

$$V_s(0) \equiv C_1 e^0 = \Phi(s) \Rightarrow C_1 = \Phi(s).$$

ШАГ 3. Найдем обратное преобразование Фурье функции V и получим решение исходной задачи:

$$U(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[V_s] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(s) e^{-s^2 t}].$$

Здесь нас выручит свойство 4:

$$\mathcal{F}^{-1}[\Phi(s) \cdot e^{-s^2 t}] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(s)] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-s^2 t}] =$$

$$= \varphi(x) * \left(\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi .$$

Обратное преобразование Фурье функции $e^{-s^2 t}$ мы нашли по таблице 1 (см. файл материалов). Заметим, что в точности такой функции в таблице нет, однако применение табличных формул 4, 6 и свойств линейности преобразования Фурье приведет нас к цели:

$$e^{-s^2 t} \equiv \left[\begin{array}{l} \text{Введем обозначения} \\ t = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{array} \right] \equiv a\sqrt{2} \left(\frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4a^2}} \right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$$\rightarrow a\sqrt{2} e^{-a^2 x^2} \equiv \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} .$$

Окончательно решение исходной задачи имеет вид

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi$$

(интегральная формула Пуассона (90)).

Теперь, когда имеются два метода решения одной и той же задачи, Вы можете их сравнить и выбрать наиболее "элегантный" из них.

С помощью преобразования Фурье можно решать также задачу для уравнения теплопроводности на полупрямой $0 < x < \infty$ при условии, что на конце $x = 0$ задано однородное граничное условие, например $U(0,t) = 0$, и начальное условие $U(x,0) = \varphi(x)$ согласовано с граничным условием: $\varphi(0) = 0$. В этом случае функцию $\varphi(x)$ продолжают нечетным образом в интервал $(-\infty, 0)$ и для такой продолженной начальной функции решают задачу Коши. Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, приводят к решению

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi , \qquad (106)$$

где $\varphi^*(\xi)$ – продолженная начальная функция. Используя нечетность

$\varphi^*(\xi)$, решение (106) можно переписать в виде

$$U(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right]d\xi.$$

Проиллюстрируем метод интегральных преобразований и на другом примере: решим задачу Коши для волнового уравнения

$$U_{tt}=U_{xx},-\infty<x<\infty,t>0,$$

$$U(x,0)=\varphi(x),U_t(x,0)=\psi(x),-\infty<x<\infty.$$

ШАГ 1. Сделаем преобразование Фурье в уравнении и в начальных условиях по переменной x:

$$\mathcal{F}[U_{tt}]=\mathcal{F}[U_{xx}],\ \mathcal{F}[U(x,0)]=\mathcal{F}[\varphi(x)],\ \mathcal{F}[U_t(x,0)]=\mathcal{F}[\psi(x)].$$

Воспользуемся свойствами преобразования Фурье и получим:

$$\frac{d^2V_s(t)}{dt^2}=-s^2V_s(t),\ V_s(0)=\Phi(s),\ V_s'(0)=\Psi(s), \qquad (107)$$

где $V_s(t)$ – Фурье-образ функции $U(x,t)$, $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ – Фурье-образы функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, s – параметр, $-\infty<s<\infty$. Таким образом, исходная задача сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

ШАГ 2. Решим задачу (107):

$$\frac{d^2V_s}{dt^2}=-s^2V_s,\ r^2=-s^2,\ r_{1,2}=\pm si,\ V_{s1}=\cos st,\ V_{s2}=\sin st\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_s=C_1\cos st+C_2\sin st$$

$$V_s(0)\equiv C_1\cos 0+C_2\sin 0=\Phi(s)\Rightarrow C_1=\Phi(s).$$

$$V_s'=-C_1s\sin st+C_2s\cos st,\ V'(0)\equiv -C_1s\sin 0+C_2s\cos 0=\Psi(s)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2=\frac{\Psi(s)}{s}.$$

Решение задачи (107) имеет вид:

$$V_s(t)=\Phi(s)\cos st+\frac{\Psi(s)}{s}\sin st.$$

ШАГ 3. Найдем обратное преобразование Фурье функции V_s и получим решение исходной задачи:

$$U(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[V_s] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(s)\cos st] + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\Psi(s)}{s}\sin st\right].$$

Мы не будем заниматься приведением этого решения к виду, удобному для изучения его свойств, так как в следующем параграфе другим методом будет получено решение той же задачи сразу в форме, удобной для исследования (формула Даламбера). Единственное, что мы позволим себе сделать, – переписать это решение, воспользовавшись определением обратного преобразования Фурье:

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(s)\cos ste^{isx}ds + \int_{-\infty}^{\infty}\Psi(s)\frac{\sin st}{s}e^{isx}ds.$$

Для конкретных начальных значений $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно найти их Фурье-образы, а затем, подставив их в интегралы, сделать обратное преобразование.

§6. Метод Даламбера решения волнового уравнения

В этом параграфе решение задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{aligned} &U_{tt} = U_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0, \\ &U(x,0) = \varphi(x), U_t(x,0) = \psi(x), -\infty < x < \infty \end{aligned} \qquad (108)$$

проведем методом Даламбера. При этом процесс решения разобьем на несколько шагов.

ШАГ 1. Заменим координаты (x,t) новыми координатами (ξ,η), в которых волновое уравнение примет другой, тоже канонический, вид: $U_{\xi\eta} = 0$. Такая замена выполняется по формулам

$$\begin{cases} \xi = x + t, \\ \eta = x - t. \end{cases} \qquad (109)$$

Проверим это:

$$U_x = U_\xi \cdot \xi'_x + U_\eta \cdot \eta'_x = U_\xi + U_\eta,\ U_{xx} \equiv (U_x)_x = (U_\xi + U_\eta)_\xi +$$

$$+ (U_\xi + U_\eta)_\eta = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

$$U_t = U_\xi \cdot \xi'_t + U_\eta \cdot \eta'_t = U_\xi - U_\eta,\ U_{tt} \equiv (U_t)_t = (U_\xi - U_\eta)_\xi -$$

$$-(U_\xi - U_\eta)_\eta = U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

После подстановки этих производных в волновое уравнение, получим:

$$U_{tt} - U_{xx} = (U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) - (U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) = -4U_{\xi\eta} = 0,$$

что и требовалось доказать.

ШАГ 2. Преобразованное уравнение легко решается двумя последовательными интегрированиями (сначала по переменной η, а затем по ξ):

$$U_{\xi\eta} \equiv \frac{\partial U_\xi}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow U_\xi = C(\xi) \text{ – произвольная функция от } \xi.$$

$$U_\xi \equiv \frac{\partial U}{\partial \xi} = C(\xi) \Rightarrow U = \int C(\xi)d\xi + C_1(\eta),$$

где $C_1(\eta)$ – произвольная функция от η. Так как $C(\xi)$ – произвольная функция, то и $\int C(\xi)d\xi = C_2(\xi)$ – также произвольная функция.

Окончательно, общее решение $U(\xi,\eta)$ имеет вид

$$U(\xi,\eta) = C_1(\eta) + C_2(\xi), \qquad (110)$$

где $C_1(\eta)$ и $C_2(\xi)$ – произвольные функции.

ШАГ 3. Для нахождения общего решения первоначального уравнения подставим в (110) вместо ξ и η выражения (109):

$$U(x,t) = C_1(x-t) + C_2(x+t). \qquad (111)$$

ШАГ 4. Определим функции C_1 и C_2, используя начальные условия из (108). После подстановки первого условия получим

$$U(x,0) \equiv C_1(x) + C_2(x) = \varphi(x).$$

Найдем производную функции U в (111) по переменной t и подставим второе условие:

$$U_t = -C_1'(x-t) + C_2'(x+t),\ U_t(x,0) \equiv -C_1'(x) + C_2'(x) = \psi(x).$$

В результате будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} C_1(x) + C_2(x) = \varphi(x) \\ -C_1'(x) + C_2'(x) = \psi(x). \end{cases} \qquad (112)$$

Если проинтегрировать второе уравнение системы (112) по x в пределах от x_0 до x, то получим следующую систему:

$$\begin{cases} C_1(x) + C_2(x) = \varphi(x) \\ -C_1(x) + C_2(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + C_3, \ C_3 \ - \text{некоторая постоянная.} \end{cases}$$

При сложении этих уравнений получим

$$2C_2(x) = \varphi(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi + C_3 \Rightarrow C_2(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi\right) + \frac{C_3}{2}.$$

Если из первого уравнения системы вычесть второе уравнение, то будем иметь

$$2C_1(x) = \varphi(x) - \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi - C_3 \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) - \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\xi)d\xi\right) - \frac{C_3}{2},$$

Подставим теперь полученные функции в общее решение (111):

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\cdot\varphi(x-t) - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x-t} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\cdot\varphi(x+t) + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x+t} \psi(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\left(\int\limits_{x_0}^{x+t} \psi(\xi)d\xi - \int\limits_{x_0}^{x-t} \psi(\xi)d\xi\right). \qquad (113)$$

Поменяем местами пределы интегрирования во втором интеграле, стоящем в скобках в (113). В результате получим решение исходной задачи Коши

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi. \qquad (114)$$

Формула (114) называется **формулой Даламбера**. В следующем параграфе мы исследуем решение, даваемое формулой Даламбера.

§7. Пространственно-временная интерпретация формулы Даламбера

При исследовании формулы Даламбера будем исходить из физического смысла волнового уравнения. Рассмотрим уравнение свободных колебаний бесконечной струны

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \tag{115}$$

и начальные условия

$$U(x,0) = \varphi(x),\ U_t(x,0) = \psi(x). \tag{116}$$

Такая задача Коши с помощью замены независимой переменной $\tau = at$ сводится к задаче (108):

$$U_t = U_\tau \cdot a, U_{tt} = U_{\tau\tau} \cdot a^2, U_t(x,0) = U_\tau(x,0) \cdot a \Rightarrow$$

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} \equiv a^2 (U_{\tau\tau} - U_{xx}) = 0, U(x,0) = \varphi(x), U_t(x,0) = U_\tau(x,0) \cdot a = \psi(x).$$

Решение преобразованной задачи имеет вид (см. формулу Даламбера (114)):

$$U(x,\tau) = \frac{\varphi(x-\tau) + \varphi(x+\tau)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-\tau}^{x+\tau} \psi(\xi) d\xi .$$

Если теперь в эту формулу вместо τ подставить $a \cdot t$, то получится решение исходной задачи

$$U(x,\tau) = \frac{\varphi(x-\tau) + \varphi(x+\tau)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-\tau}^{x+\tau} \psi(\xi) d\xi . \tag{117}$$

Прежде, чем перейти к физической интерпретации этой формулы, сделаем следующее замечание.

Замечание. Рассмотрим в отдельности функции $C_1(x-at)$ и $C_2(x+at)$, входящие в общее решение (111) (коэффициент a в них появился потому, что нас сейчас интересует более общее уравнение (115)). Начнем с функции $C_1(x-at)$ и построим графики этой функции при возрастающих значениях t: $t = t_0, t = t_1, t = t_2$ и т.д. (см. рис.16).

Если по очереди проецировать эти картинки на экран (как в мультфильмах), то они "побегут" вправо. Процесс передвижения отклонения по струне называется **волной**. При этом коэффициент a является **скоростью распространения волны**. В самом деле, предположим, что параллельно оси x движется наблюдатель со

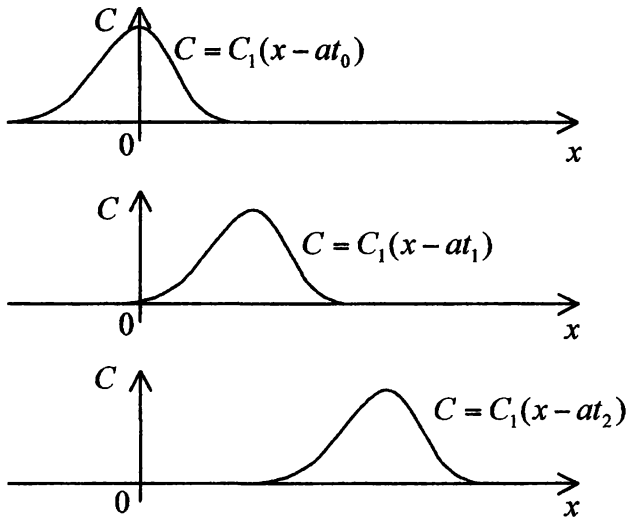


Рис. 16

скоростью a. Пусть в некоторый момент времени t_0 он находился в точке x_0. Тогда за промежуток $\Delta t = t - t_0$ наблюдатель сместится вправо на величину $a\Delta t$ и окажется в точке $x = x_0 + a\Delta t$. Если в точке x_0 наблюдатель видел отклонение струны на величину $C_1(x_0 - at_0)$, то в момент t величина отклонения $C_1(x - at) \equiv C_1(x_0 + a\Delta t - at) \equiv$ $\equiv C_1(x_0 + a(t - t_0) - at) \equiv C_1(x_0 - at_0)$ – будет точно такой же! То есть наблюдатель будет видеть форму струны не изменяющейся.

Вторая функция $C_2(x + at)$ тоже представляет собой волну, но только она будет распространяться со скоростью a влево. Часто функции $C_1(x - at)$ и $C_2(x + at)$ называют, соответственно, **прямой и обратной волной**. Таким образом, общее решение $U(x,t)$ (формула (111)) волнового уравнения является суперпозицией прямой и обратной волны.

Теперь дадим интерпретацию формулы Даламбера для двух частных случаев.

Случай 1. Предположим, что начальное отклонение отлично от нуля, а начальная скорость равна нулю. Это означает, что начальные условия имеют вид

$$U(x,0)=\varphi(x), U_t(x,0)=0.$$

При таких начальных условиях получается решение задачи Коши, которое называется **волной отклонения**. Уравнение волны отклонения определяется формулой Даламбера

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2},$$

то есть решение U в некоторой точке x_0 в момент времени t_0 зависит от значений начальной функции φ в двух точках на оси x: в точке (x_0-at_0) и в точке (x_0+at_0) (см. рис.17).

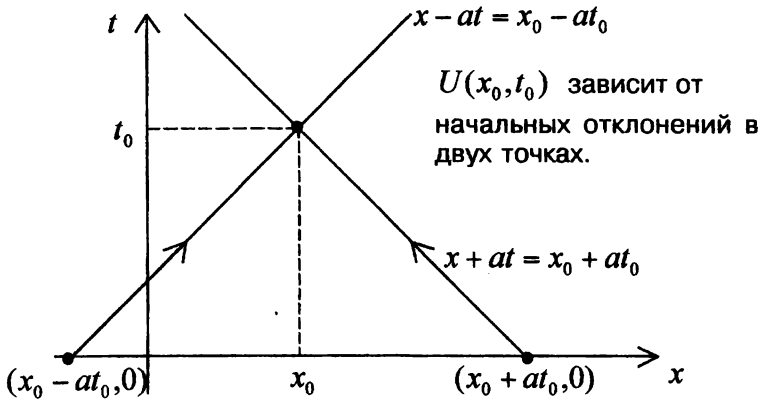


Рис. 17

Значение U равно среднему арифметическому значений начальной функции φ в точках (x_0-at_0) и (x_0+at_0). На рис. 17 изображена плоскость xOt, которая называется фазовой плоскостью. На оси x указаны точки $(x_0-at_0,0)$ и $(x_0+at_0,0)$, в которых начальные отклонения струны определяют величину отклонения струны в точке x_0 в момент времени t_0. Эти точки являются точками пересечения прямых $x-at=x_0-at_0$ и $x+at=x_0+at_0$ с осью x. Указанные прямые называются **характеристиками волнового уравнения**. Позже мы познакомимся с ними подробнее (см. §11). Треугольник с вершиной в точке (x_0,t_0) и основанием, которое получается при пересечении

характеристик с осью x (см. рис.17), называется **характеристическим треугольником**.

Используя такую интерпретацию формулы Даламбера, изобразим фазовую картину решения следующей задачи:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, -\infty < x < \infty, t > 0,$$

$$U(x,0) = \begin{cases} 1, x \in (-1,1), \\ 0, x \notin (-1,1). \end{cases}$$

Замечание. На самом деле начальные отклонения струны не могут быть разрывными в точках $x = -1$ и $x = 1$, ведь струна не разрывается. Однако мы не слишком сильно погрешим против истинной картины распространения колебаний, если будем считать их кусочно постоянными. Дело в том, что, во-первых, рассматриваются очень малые колебания струны, и, во-вторых, малые изменения начальных значений незначительно влияют на решение задачи (об этом см. гл. III).

На рисунке 18 изображена фазовая плоскость xOt. Решение $U(x,t)$ задачи отлично от нуля только в заштрихованных областях, причем начальное отклонение распространяется с одинаковой скоростью в двух противоположных направлениях – возникают прямая и обратная волны. Границы этих областей – это характеристики волнового уравнения: $x - at = -1, x - at = 1, x + at = -1, x + at = 1$.

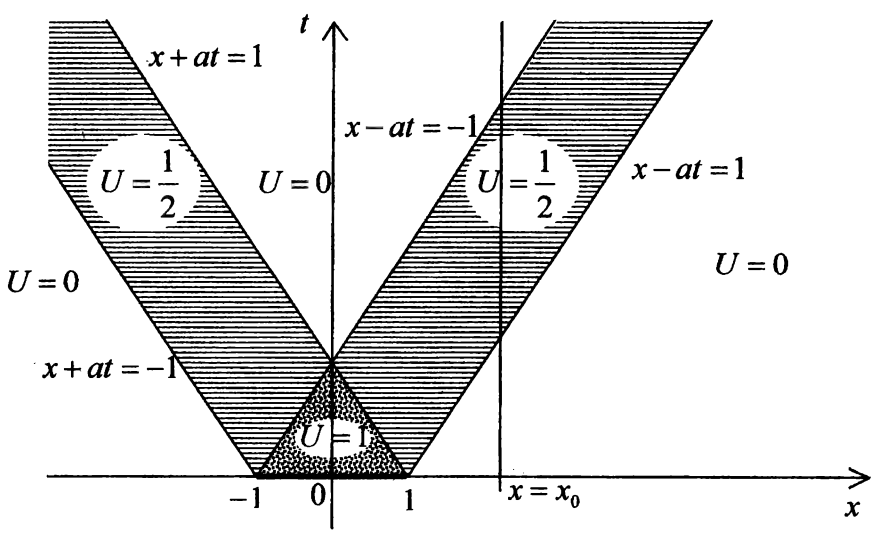


Рис. 18.

Если рассмотреть процесс колебания некоторой фиксированной точки струны $x = x_0$, то нетрудно заметить (см. рис.18), что она колеблется только в конечный промежуток времени: от момента $t_1 = \frac{x_0 - 1}{a}$ до момента $t_2 = \frac{x_0 + 1}{a}$, то есть $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{a}$. В остальное время точка x_0 находится в покое. Говорят, что в момент t_1 через точку $x = x_0$ проходит передний фронт волны, а в момент t_2 – задний фронт волны. Вообще, **фронтом волны** называется граница между возмущенной (колеблющейся) и невозмущенной областями среды (точками струны). Для прямой волны уравнение переднего фронта $x - at = 1$, а заднего фронта $x - at = -1$. Для обратной волны, соответственно, $x + at = -1$ – уравнение переднего фронта, а $x + at = 1$ – заднего фронта.

Рассмотрим теперь случай 2.

Случай 2. Пусть начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость отлична от нуля. Это означает, что начальные условия имеют вид

$$U(x,0) = 0,\ U_t(x,0) = \psi(x).$$

В этом случае решение задачи Коши называют **волной импульса**. Оно имеет вид (см. формулу Даламбера (117))

$$U(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \equiv \left(\frac{1}{2at}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\right)\cdot t,$$

то есть решение U в некоторой точке x_0 в момент времени t_0 зависит от начальных скоростей ψ во всех точках отрезка $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ (см. рис.19). Значение U равно (интегральному) среднему значению начальной скорости на отрезке $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$, умноженному на промежуток времени t_0.

На рис. 19 изображена фазовая плоскость xOt. Точки $(x_0 - at_0, 0)$ и $(x_0 + at_0, 0)$ являются точками пересечения характеристик

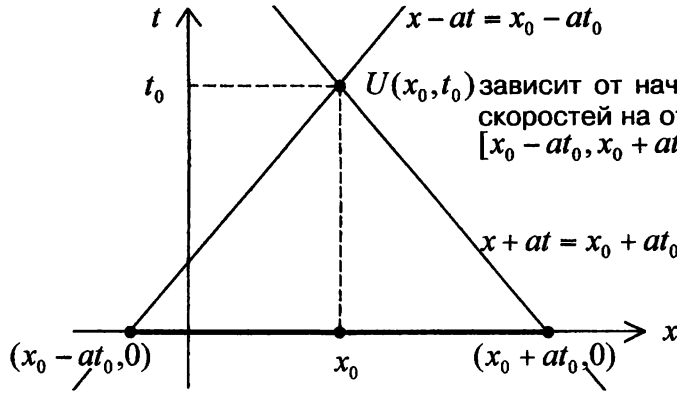


Рис. 19.

$x-at=x_0-at_0$ и $x+at=x_0+at_0$ с осью x. В качестве примера приведем фазовую картину решения следующей задачи:

$$U_{tt}=a^2U_{xx},-\infty<x<\infty,t>0,$$

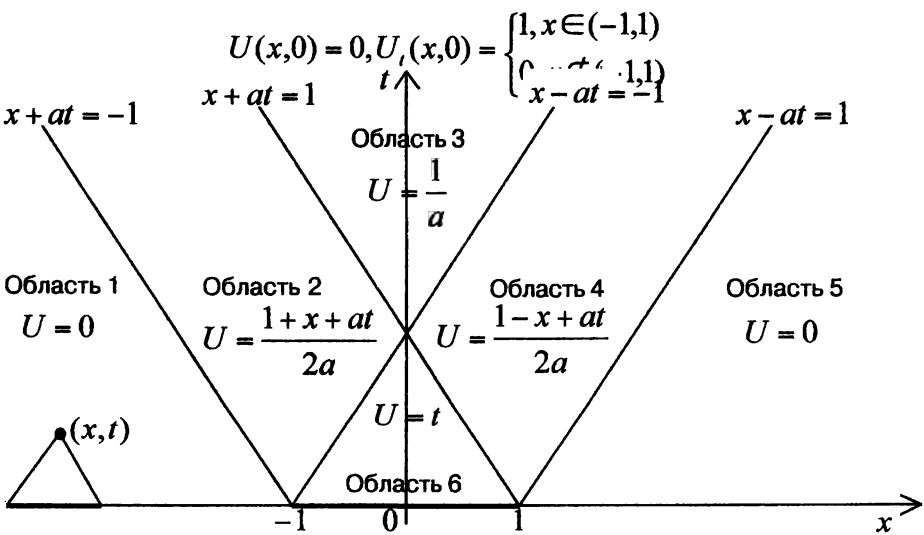


Рис. 20.

Рис. 20 описывает процесс колебания струны, которой сообщается начальная единичная скорость на отрезке $-1<x<1$. В этом случае вся верхняя половина фазовой плоскости характеристиками разбивается на шесть областей. В каждой из этих областей решение $U(x,t)$ легко

находится по формуле Даламбера:

1. В области 1 (так же, как в области 5) функция

$$U(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}0d\xi=0.$$

При вычислении интеграла всегда удобно представить себе характеристический треугольник с вершиной в точке, лежащей в соответствующей области (см. рис.20). Тогда значение $U(x,t)$ будет определяться значениями начальной функции $\psi(x)$ в основании характеристического треугольника.

2. В области 2 функция

$$U(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{-1}^{x+at}1d\xi=\frac{x+1+at}{2a}.$$

3. В области 3 функция

$$U(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{-1}^{1}1d\xi=\frac{1}{a}.$$

4. В области 4 функция

$$U(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{1}1d\xi=\frac{1-x+at}{2a}.$$

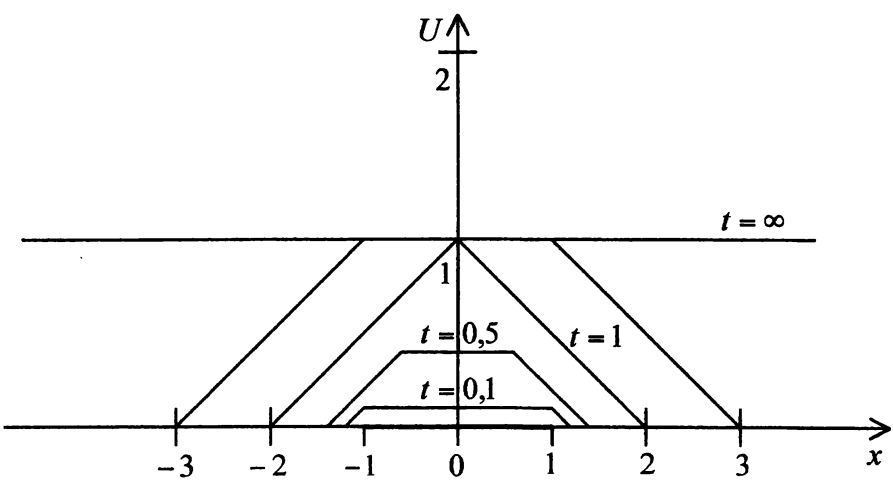


Рис. 21.

5. В области 6 функция

$$U(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}1d\xi=t.$$

Это решение в различные моменты времени можно изобразить на плоскости xOU (см. рис.21). Здесь для простоты положим $a=1$.

Графики функции $U(x,t)$, изображенные на рис.21, задают форму струны в различные моменты времени.

§8. Решение смешанной задачи для волнового уравнения на полупрямой

С помощью формулы Даламбера можно решать не только задачу Коши на бесконечной прямой, но и смешанную (начально-краевую) задачу на полупрямой. Рассмотрим волновое уравнение

$$U_{tt}=a^2U_{xx},0<x<\infty,t>0, \tag{118}$$

однородное граничное условие

$$U(0,t)=0,t>0, \tag{119}$$

и начальные условия

$$U(x,0)=\varphi(x),\ U_t(x,0)=\psi(x),\ 0<x<\infty. \tag{120}$$

Физически эта задача описывает колебания полубесконечной струны, левый конец которой закреплен, при заданных начальных условиях.

Для того, чтобы воспользоваться формулой Даламбера, нужно знать начальные значения на всей прямой. С этой целью продолжим начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $x<0$ нечетным образом: $\varphi(-x)\equiv-\varphi(x)$ и $\psi(-x)\equiv-\psi(x)$.

Обозначим через $\varphi^*(x)$ и $\psi^*(x)$ продолженные функции. Так как при $x=0$ должно выполняться условие согласования: $U(0,0)=\varphi(0)=0$, то можно считать, что $\varphi^*(0)=0$. Функция $\psi^*(x)$ в точке $x=0$ может иметь разрыв первого рода. Для этих начальных значений по формуле Даламбера построим решение $U(x,t)$, определенное при всех x и при $t>0$:

$$U(x,t)=\frac{\varphi^*(x-at)+\varphi^*(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi^*(\xi)d\xi. \qquad (121)$$

Эта функция является решением начально-краевой задачи (118), (119), (120). Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно лишь проверить выполнение граничного и начальных условий. Положим в (121) $x=0$:

$$U(0,t)=\frac{\varphi^*(-at)+\varphi^*(at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{+at}\psi^*(\xi)d\xi.$$

В силу нечетности функций $\varphi^*(x)$ и $\psi^*(x)$ будем иметь:

$$\varphi^*(-at)+\varphi^*(at)=0,\ \int_{-at}^{+at}\psi^*(\xi)d\xi=0.$$

Следовательно, $U(0,t)=0$. Аналогично, положим в (121) $t=0$ и $x>0$:

$$U(x,0)=\frac{\varphi^*(x)+\varphi^*(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x}^{x}\psi^*(\xi)d\xi=\varphi^*(x)\equiv\varphi(x).$$

Для проверки выполнения второго начального условия найдем частную производную функции (121):

$$U_t(x,t)=\frac{-a\frac{d\varphi^*}{dt}(x-at)+a\frac{d\varphi^*}{dt}(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}(a\cdot\psi^*(x+at)+a\cdot\psi^*(x-at))$$

(Здесь мы воспользовались правилом дифференцирования интегралов с переменными пределами интегрирования). Положим теперь $t=0$ и $x>0$:

$$U_t(x,0)=\frac{-a\frac{d\varphi^*}{dt}(x)+a\frac{d\varphi^*}{dt}(x)}{2}+\frac{1}{2a}(a\cdot\psi^*(x)+a\cdot\psi^*(x))=\psi^*(x)\equiv\psi(x)$$

Решение (121) можно переписать и в другом виде, если воспользоваться свойствами функций φ^* и ψ^*:

$\varphi^*(x-at)\equiv\varphi(x-at)$, $\varphi^*(x+at)\equiv\varphi(x+at)$, если $x-at>0$;

$\varphi^*(x-at) \equiv -\varphi(at-x)$, $\varphi^*(x+at) \equiv \varphi(x+at)$, если $x-at<0$, $x>0, t>0$;

$$\int_{x-at}^{x+at} \psi^*(\xi)d\xi \equiv \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, \text{ если } x-at>0,$$

$$\int_{x-at}^{x+at} \psi^*(\xi)d\xi \equiv \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, \text{ если } x-at<0, x>0, t>0.$$

В результате будем иметь:

$$U(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, \text{если } x-at>0; \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, \text{если } x-at<0, x>0, t>0. \end{cases} \quad (122)$$

В области $x>at$ влияние граничного условия не сказывается, и выражение для $U(x,t)$ совпадает с решением для бесконечной прямой. В области $x<at$ и $x>0, t>0$, на вид решения $U(x,t)$ будет влиять отраженная волна (см. рис.22).

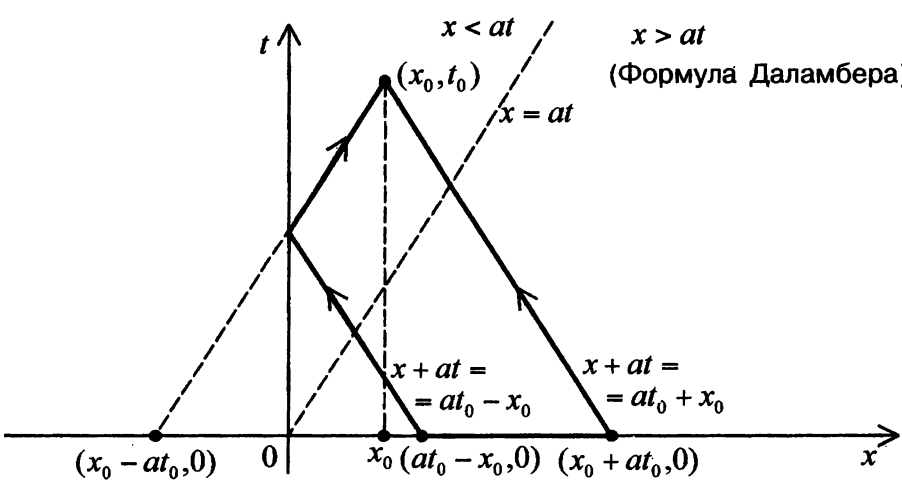


Рис. 22

Процесс отражения волны лучше всего посмотреть на следующих рисунках.

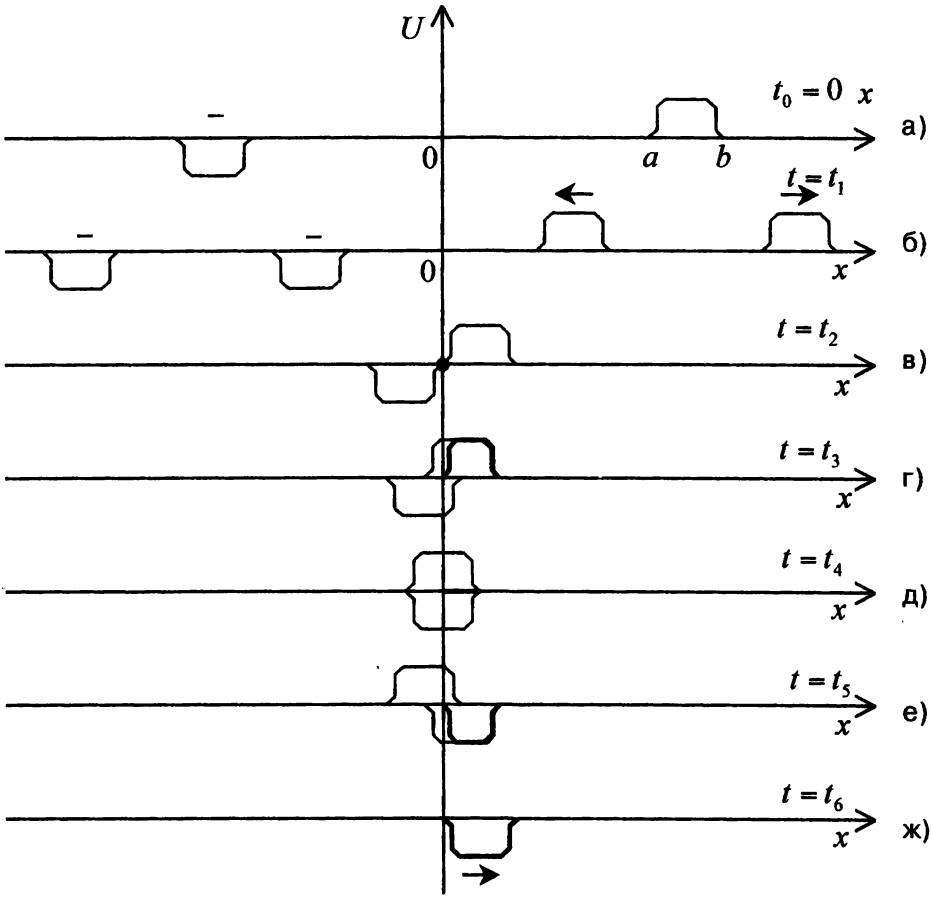


Рис. 23.

На рисунке 23 в плоскости xOU изображены отклонения полубесконечной струны, закрепленной при $x = 0$, в различные моменты времени: $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_6$.

В момент $t_0 = 0$ начальное отклонение струны отлично от нуля только на отрезке $[a,b]$, а начальная скорость всюду равна нулю. Решение такой задачи получится, если продолжить начальную функцию

нечетным образом при $x < 0$ (см. рис.23а).

Вначале процесс происходит так же, как и на неограниченной прямой. Заданное отклонение разбивается на две волны (волны отклонения) – прямую и обратную, движущиеся в противоположные стороны с постоянной скоростью (см. рис.23б). Это продолжается до тех пор, пока обратная волна не дойдет до точки $x = 0$ (рис.23в). С этого момента начинается отражение этой волны от закрепленного конца, которое можно представить себе как наложение двух волн: рассматриваемой волны и симметричной волны, пришедшей из отрицательной области (рис. 23г). Результирующий профиль отражающейся волны укорачивается, потом отклонения исчезают (рис.23д), а затем отклонения появляются внизу (рис.23е). В этом случае говорят, что волна меняет фазу. Наконец отраженная волна движется вправо вслед за ушедшей прямой волной с той же скоростью.

Совсем иной характер имеет процесс распространения волн, когда струна имеет конечную длину L и оба конца закреплены. В этом случае бегущих волн уже не будет, так как они будут взаимодействовать с концами струны. Вместо них возникают другие волны, которые называют стоячими волнами. Посмотрим, например, что случится, если гитарную струну привести в движение. Такую задачу мы решали в первой юните (см. гл. IV, §3) методом Фурье. Там было получено решение, записанное в виде бесконечной суммы частных решений – **собственных колебаний**, которые имеют вид $U_n(x,t) = \sin\frac{\pi n}{L}x(A_n\cos\frac{\pi n a}{L}t + B_n\sin\frac{\pi n a}{L}t)$. Первые три собственных колебания при разных значениях t изображены на рис. 24. Они называются **гармониками**: $U_1(x,t)$ – основная гармоника, $U_2(x,t)$ – вторая гармоника, $U_3(x,t)$ – третья гармоника. Каждое собственное колебание происходит с одной и той же частотой. То есть при таком колебании все точки струны одновременно достигают своего максимального отклонения и одновременно проходят положение равновесия. Такие колебания называются **стоячими волнами**. Точки струны, которые остаются неподвижными в стоячих волнах, называются узлами. Основная гармоника имеет два узла – концы струны. Вторая гармоника – три, а третья гармоника – четыре узла (см. рис.24). Между узлами лежат точки, в которых струна достигает максимального отклонения, они называются пучностями. Частоты, с которыми происходят собственные колебания,

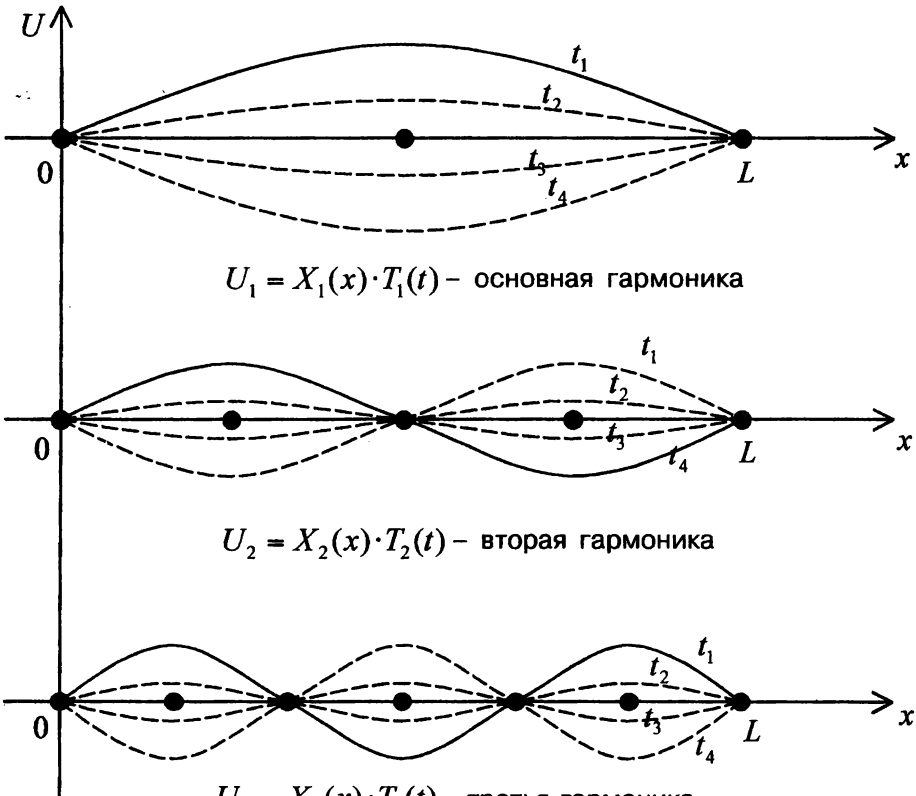


Рис. 24

называются **собственными частотами**. Основная гармоника имеет наименьшую собственную частоту, которая вычисляется по формуле $\omega_1 = \frac{\pi}{L} a$ (напомним, что $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, T – сила натяжения, ρ – плотность струны). Когда струна колеблется, она издает звук, высота которого возрастает вместе с частотой колебаний. Самый низкий тон будет соответствовать наименьшей собственной частоте. В результате наложения (суперпозиции) стоячих волн возникают те сложные колебания, которые описываются функциональным рядом.

§9. Метод характеристик решения уравнений первого порядка

В этом параграфе рассматривается **задача Коши для линейных уравнений первого порядка** с двумя независимыми переменными вида

$$a(x,t)U_x + b(x,t)U_t + c(x,t)U = 0, -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty. \qquad (123)$$

Пусть в начальный момент времени решение уравнения (123) удовлетворяет условию

$$U(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty. \qquad (124)$$

Решение такой задачи будем искать **методом характеристик**. Суть этого метода заключается в том, что можно так подобрать новые переменные (они называются *характеристиками*), что после перехода к ним уравнение с частными производными преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение. После решения преобразованного уравнения возвращаются к прежним переменным и получают решение исходной задачи. Этот метод мы уже применяли при решении задачи Коши для волнового уравнения (см. §6). Правда, надо заметить, что после преобразования тогда получилось все-таки уравнение с частными производными, но оно было очень простое, и его решение не вызвало затруднений. Другим существенным отличием от §6 является то, что сейчас мы сможем решать этим методом не только уравнения с постоянными, но и с переменными коэффициентами.

Вначале разберем простой пример.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$U_x + U_t = 0, U(x,0) = \varphi(x). \qquad (125)$$

Решение. В данном уравнении сделаем замену переменных $x = s + \tau$, $t = s$. Для этого вычислим производные

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial s}\cdot 0 + \frac{\partial U}{\partial \tau}\cdot 1 = \frac{\partial U}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial s}\cdot 1 + \frac{\partial U}{\partial \tau}\cdot(-1) = \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial U}{\partial \tau}.$$

При вычислении этих производных надо выразить s и τ через x и t: $s = t$, $\tau = x - t$, и отдельно найти производные

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \frac{\partial s}{\partial t} = 1, \frac{\partial \tau}{\partial x} = 1, \frac{\partial \tau}{\partial t} = -1.$$

В результате данное уравнение преобразуется к виду

$$U_x + U_t \equiv U_\tau + U_s - U_\tau = U_s = 0.$$

Решим преобразованное уравнение:

$U_s = 0 \Rightarrow U = C(\tau)$, где $C(\tau)$ – произвольная функция.

Возвращаясь к первоначальным переменным, получим общее решение исходного уравнения:

$$U(x,t) = C(x-t). \qquad (126)$$

Определим функцию C из начального условия:

$$U(x,0) = C(x) \equiv \varphi(x).$$

Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$U(x,t) = \varphi(x-t).$$

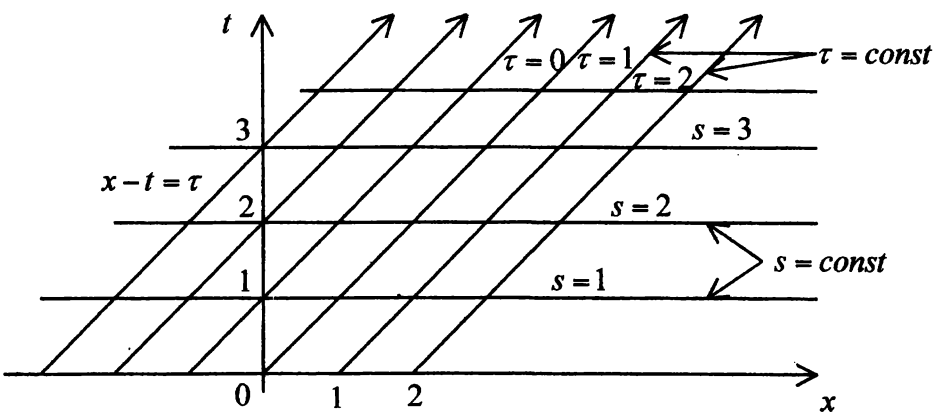


Рис. 25.

Если рассмотреть семейство линий $s = const$ и $\tau = const$ в фазовой плоскости xOt (см. рис. 25), то нетрудно сделать вывод, что начальные значения $\varphi(x)$ не изменяются вдоль линий $\tau = const$. Эти линии называются *характеристиками*. Условно это изображено на рис. 26.

В дальнейшем нам нужно знать общее решение уравнения

$$U_t + aU_x = 0. \qquad (127)$$

С помощью замены переменной $\tau = at$ приведем данное уравнение к виду (125) и воспользуемся общим решением (126):

$$U_t = U_\tau \cdot a \Rightarrow aU_\tau + aU_x = 0 \Rightarrow U_\tau + U_x = 0 \Rightarrow U = C(x-\tau).$$

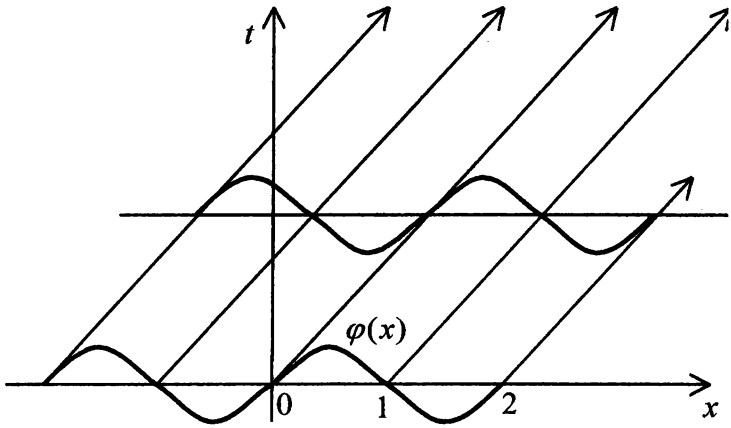


Рис. 26.

Возвращаясь к переменным (x,t), получим общее решение уравнения (127):

$$U = C(x - at), \tag{128}$$

где C – произвольная функция.

Эти результаты обобщаются и на случай общей задачи Коши (123), (124).

Замечание. При решении примера остался невыясненным существенный момент: как найти такую замену переменных, при которой уравнение преобразуется в обыкновенное? В теории уравнений с частными производными доказано, что для уравнения (123) замена определяется из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a(x,t), \\ \dfrac{dt}{ds} = b(x,t), \ 0 \le s < \infty, \end{cases} \tag{129}$$

где $a(x,t)$ и $b(x,t)$ – коэффициенты уравнения (123).

Уравнения, входящие в систему (129), называются **уравнениями характеристик**, а решения этой системы – **характеристиками уравнения с частными производными (123)**. В фазовой плоскости xOt характеристики имеют вид, изображенный на рис. 27.

Переменная s изменяется вдоль характеристик от нуля до

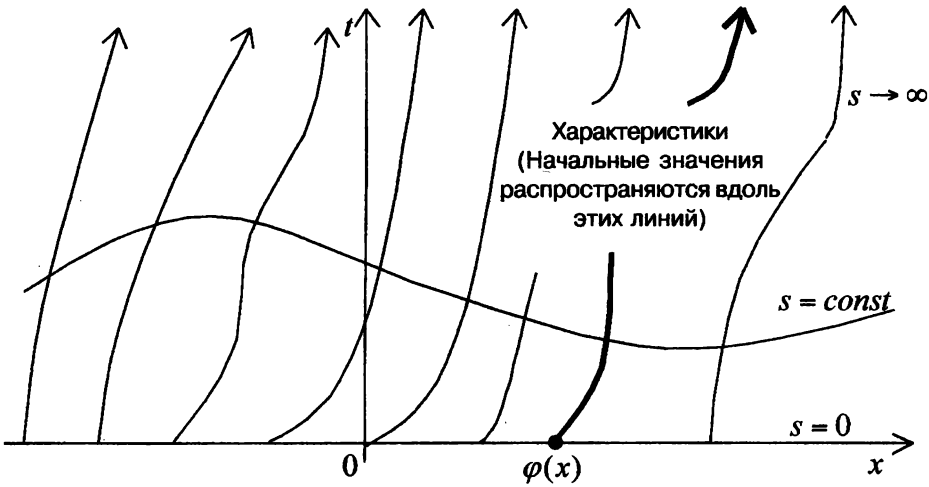


Рис. 27.

бесконечности, начиная от линии задания начального условия. Другая независимая переменная выбирается так, чтобы она изменялась вдоль линии начального условия и была постоянной вдоль каждой характеристики. Это означает, что $t(0)=0, x(0)=\tau$, где $-\infty<\tau<\infty$. Используя эти условия, находят значения произвольных постоянных, входящих в общее решение системы (129).

Характеристики $\{(x(s),t(s)): 0<s<\infty\}$ обладают тем свойством, что полная производная решения U вдоль характеристик имеет вид

$$\frac{dU}{ds}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial U}{\partial t}\frac{dt}{ds}\equiv a(x,t)U_x+b(x,t)U_t.$$

Таким образом, уравнение (123) на характеристиках преобразуется в обыкновенное уравнение

$$\frac{dU}{ds}+c(x(s),t(s))U=0.$$

Это означает, что начальное значение $\varphi(x)$ в точке x оказывает влияние на решение только вдоль характеристики, проходящей через точку x и расположенной в фазовой плоскости (в этом случае говорят, что начальные значения распространяются вдоль характеристик, см. рис.27).

Если сделать замену переменных не только в уравнении, но и в начальном условии, то получится задача Коши для обыкновенного

уравнения следующего вида

$$\frac{dU}{ds} + c(x(s),t(s))U = 0,\ U(0) = \varphi(\tau),\ \varphi(x), -\infty < \tau < \infty.$$

Поэтому можно сразу решить задачу Коши для преобразованного уравнения и, возвратившись к первоначальным переменным, получить решение исходной задачи.

Таким образом, мы имеем алгоритм решения задачи Коши для уравнений первого порядка (123), (124):

ШАГ 1. Составим систему уравнений характеристик

$$\frac{dx}{ds} = a(x,t), \frac{dt}{ds} = b(x,t),$$

и решим ее. Общее решение $x = x(s, C_1, C_2), t = t(s, C_1, C_2)$.

ШАГ 2. Найдем постоянные интегрирования из начальных условий $t(0) = 0, x(0) = \tau, -\infty < \tau < \infty$, и получим формулы перехода от переменных (x,t) к характеристическим переменным (s,τ): $x = x(s,\tau), t = t(s,\tau)$.

ШАГ 3. Решим задачу Коши для преобразованного уравнения:

$$\frac{dU}{ds} + c(x(s,\tau),t(s,\tau))U = 0,\ U(0) = \Phi(\tau) \Rightarrow U = U(s,\tau).$$

ШАГ 4. Выразим переменные s и τ из формул преобразования переменных и подставим их в решение $U = U(s,\tau)$. Получим решение исходной задачи $U = U(x,t)$.

Применим этот алгоритм к решению следующей задачи с переменными коэффициентами.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$xU_x + U_t + tU = 0, -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty,$$

$$U(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty.$$

Решение.

ШАГ 1. Система характеристик имеет вид:

$$\frac{dx}{ds} = x, \frac{dt}{ds} = 1.$$

Общее решение системы: $x = C_1 e^s, t = s + C_2$.

ШАГ 2. Найдем постоянные C_1 и C_2 из начальных условий:

$$t(0)=0, x(0)=\tau \Rightarrow C_2=0, C_1=\tau.$$

Таким образом, формулы перехода к характеристическим координатам (s,τ) имеют вид:

$$x=\tau e^s, t=s.$$

ШАГ 3. Решим задачу Коши

$$\frac{dU}{ds}+sU=0,\ U(0)=\Phi(\tau), \text{ где } \Phi(\tau)\equiv\varphi(\tau),\ 0\le s<\infty.$$

Общее решение имеет вид:

$$\frac{dU}{U}+sds=0\Rightarrow \ln|U|+\frac{s^2}{2}=C\Rightarrow U=C_1e^{-s^2/2}.$$

Найдем значение C_1 из начального условия:

$$U(0)=\varphi(\tau)\Rightarrow C_1=\varphi(\tau).$$

Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$U=\varphi(\tau)e^{-s^2/2}.$$

ШАГ 4. Выразим переменные s и τ из формул $x=\tau e^s, t=s$ и получим $s=t, \tau=xe^{-t}$. Подставим их в решение преобразованной задачи:

$$U\equiv U(s,\tau)=\varphi(xe^{-t})e^{-t^2/2}.$$

Если, к примеру, начальная функция имеет вид $\varphi(x)=\sin x$, то решение задачи Коши запишется в виде

$$U(x,t)=\sin(xe^{-t})e^{-t^2/2}.$$

§10. Системы уравнений первого порядка

Методы, изложенные в предыдущем параграфе, позволяют также решать системы уравнений с частными производными первого порядка. Для простоты рассмотрим систему двух уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} + a_{11}\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial t} + a_{21}\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \end{cases} \qquad (130)$$

где $-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$, U_1 и U_2 – неизвестные функции.

Пусть

$$U_1(x,0) = f(x), U_2(x,0) = g(x), -\infty < x < \infty. \qquad (131)$$

Система (130) является линейной однородной системой с постоянными коэффициентами. Запишем ее в матричном виде. Обозначим через

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \ \overline{U}_t = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial t} \end{pmatrix}, \ \overline{U}_x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial x} \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \overline{F}(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда система будет иметь вид

$$\overline{U}_t + A\overline{U}_x = 0.$$

Начальные условия (131) будут записываться в виде $\overline{U}(x,0) = \overline{F}(x)$.

Ограничимся случаем, когда матрица коэффициентов A имеет различные действительные собственные значения λ_1 и λ_2, которым соответствуют собственные векторы $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$.

Рассмотрим преобразование неизвестных функций вида $\overline{U} = P\overline{V}$, где P – матрица, у которой столбцами являются координаты собственных векторов:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда получим:

$$\overline{U}_t = P\overline{V}_t, \overline{U}_x = P\overline{V}_x \Rightarrow P\overline{V}_t + AP\overline{V}_x = 0.$$

Умножим преобразованную систему слева на матрицу P^{-1} (она

существует, так как λ_1 и λ_2 – различные):

$$P^{-1}P\overline{V}_t + P^{-1}AP\overline{V}_x = 0.$$

Из линейной алгебры известно, что $P^{-1}P = E$ – единичная матрица, $P^{-1}AP = \Lambda$ – диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят собственные значения λ_1 и λ_2.

В результате система запишется в виде

$$\overline{V}_t + \Lambda\overline{V}_x = 0,$$

то есть она распадается на два независимых уравнения

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial V_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial V_2}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial V_2}{\partial x} = 0.$$

Применяя к каждому уравнению метод характеристик (см. решение уравнения (127) и формулу общего решения (128)), получим

$$V_1 = C_1(x - \lambda_1 t),\ V_2 = C_2(x - \lambda_2 t), \qquad (132)$$

где C_1 и C_2 – произвольные функции. Для получения общего решения исходной системы (130) подставим решения V_1 и V_2 в формулу $\overline{U} = P\overline{V}$. Вид функций C_1 и C_2 получается из начальных условий (131).

Пример. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial t} + 8\dfrac{\partial U_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial U_2}{\partial t} + 2\dfrac{\partial U_1}{\partial x} = 0, -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty, \end{cases} \qquad (133)$$

$$U_1(x,0) = \sin x, U_2(x,0) = \cos x, -\infty < x < \infty. \qquad (134)$$

Решение.

Запишем систему уравнений в матричном виде:

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ \overline{F}(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \overline{U}_t = A\overline{U}_x = 0, \overline{U}(x,0) = \overline{F}(x).$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-\lambda & 8\\ 2 & -\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow |A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 8\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-16=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1=4, \lambda_2=-4.$$

Собственный вектор для значения λ_1 находим следующим образом:

$$(A-\lambda_1 E)\bar{p}=0\Rightarrow\begin{cases}-4p_1+8p_2=0\\ 2p_1-4p_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1=2p_2\\ p_2\end{cases}$$ –любое действительное число.

Положим $p_2=1$, тогда $p_1=2$. Следовательно, первый собственный вектор имеет вид $\bar{p}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Аналогично определяется собственный вектор для значения λ_2:

$$(A-\lambda_2 E)\bar{p}=0\Rightarrow\begin{cases}4p_1+8p_2=0\\ 2p_1+4p_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1=-2p_2\\ p_2\end{cases}$$ –любое действительное число.

Пусть $p_2=1$, тогда $p_1=-2$. Значит второй собственный вектор равен $\bar{p}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Составим матрицу преобразования: $P=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Как следует из рассуждений, приведенных выше, после преобразования $\bar{U}=P\bar{V}$ получится система

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V_1}{\partial t}+4\dfrac{\partial V_1}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t}-4\dfrac{\partial V_2}{\partial x}=0.\end{cases}$$

Общее решение этой системы записывается по формулам:

$$V_1=C_1(x-4t),\ V_2=C_2(x+4t),$$

где C_1 и C_2 – произвольные функции. Если эти функции подставить в формулу $\overline{U} = P\overline{V}$, то получим общее решение исходной системы (133):

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(x-4t) \\ C_2(x+4t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1(x-4t) - 2C_2(x+4t) \\ C_1(x-4t) + C_2(x+4t) \end{pmatrix}.$$

Функции C_1 и C_2 найдем с помощью начальных условий (134):

$$\overline{U}(x,0) = \begin{pmatrix} 2C_1(x) - 2C_2(x) \\ C_1(x) + C_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C_1(x) = \frac{1}{4}(\sin x + 2\cos x),\ C_2(x) = \frac{1}{4}(2\cos x - \sin x).$$

Следовательно, решение задачи Коши (133), (134) равно

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sin(x-4t) + 2\cos(x-4t)) - \frac{1}{2}(2\cos(x+4t) - \sin(x+4t)) \\ \frac{1}{4}(\sin(x-4t) + 2\cos(x-4t)) + \frac{1}{4}(2\cos(x+4t) - \sin(x+4t)) \end{pmatrix}. \quad (135)$$

Формулы (135) можно преобразовать с помощью тригонометрических формул:

$$U_1 = \frac{1}{2}\big(\sin(x-4t) + \sin(x+4t)\big) + \big(\cos(x-4t) - \cos(x+4t)\big) =$$

$$= \sin x \cos 4t + 2\sin x \sin 4t = \sin x(\cos 4t + 2\sin 4t).$$

$$U_2 = \frac{1}{4}(\sin(x-4t) - \sin(x+4t)) + \frac{1}{2}(\cos(x-4t) + \cos(x+4t)) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos x \sin 4t + \cos x \cos 4t = \cos x(\cos 4t - \frac{1}{2}\sin 4t).$$

Окончательно решение задачи будет иметь вид

$$U_1 = \sin x(\cos 4t + 2\sin 4t),\ U_2 = \cos x(\cos 4t - \frac{1}{2}\sin 4t).$$

§11. Характеристики гиперболических уравнений

При решении волнового уравнения в §6 фактически был использован метод характеристик. В самом деле, с помощью замены переменных $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ мы привели уравнение к простейшему виду $U_{\xi\eta} = 0$, интегрирование которого не представляло затруднений.

Переменные ξ и η называются характеристическими переменными и получаются при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{dx} = 1, \frac{dt}{dx} = -1,$$

которые называются уравнениями характеристик для волнового уравнения (108). Общие решения этих уравнений имеют вид

$$t = x + C_1, t = -x + C_2.$$

Если определить значения постоянных C_1 и C_2 из начальных условий $t(0) = -\eta$ (для первого уравнения) и $t(0) = \xi$ (для второго уравнения), то будем иметь $C_1 = -\eta$, $C_2 = \xi$. Так получаются формулы замены переменных (109).

Уравнение $U_{\xi\eta} = f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$ тоже называют каноническим видом уравнений гиперболического типа. В общем случае при приведении уравнений гиперболического типа к такому каноническому виду рассуждают аналогичным образом.

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$A(x,y)U_{xx} + B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} = F(x,y,U,U_x,U_y) \quad (136)$$

и пусть в некоторой области D оно имеет гиперболический тип, то есть величина $\delta(x,y) \equiv B^2 - 4AC > 0$ в D.

Предположим, что существует такая замена переменных $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, при которой уравнение (136) преобразуется к каноническому виду $U_{\xi\eta} = f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$. Это означает, что

$$\overline{A} \equiv A(x,y)\xi_x^2 + B(x,y)\xi_x\xi_y + C(x,y)\xi_y^2 = 0,$$

$$\overline{C} \equiv A(x,y)\eta_x^2 + B(x,y)\eta_x\eta_y + C(x,y)\eta_y^2 = 0.$$

(Выражения $\overline{A}$ и $\overline{C}$ – это коэффициенты при производных второго порядка $U_{\xi\xi}$ и $U_{\eta\eta}$ в преобразованном уравнении). Отсюда получаем

$$A(x,y)\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + B(x,y)\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + C(x,y) = 0,$$

$$A(x,y)\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^2 + B(x,y)\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right) + C(x,y) = 0.$$

Отметим, что это – квадратные уравнения (причем одинаковые) относительно выражений ξ_x/ξ_y и η_x/η_y. Они имеют два различных решения, так как их дискриминант совпадает со значением $\delta(x,y) > 0$. Возьмем в каждом уравнении по одному решению, но так, чтобы они были различными:

$$\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \qquad (137)$$

$$\frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \qquad (138)$$

Решения этих уравнений $\xi(x,y) = const$ и $\eta(x,y) = const$ представляют собой семейства кривых в фазовой плоскости xOy, которые называются **характеристиками** дифференциального уравнения (136) (см. рис. 28).

Из равенств $\xi(x,y) = const$ и $\eta(x,y) = const$ легко получаются дифференциальные уравнения характеристик:

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \equiv 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right).$$

В силу формулы (137) будем иметь

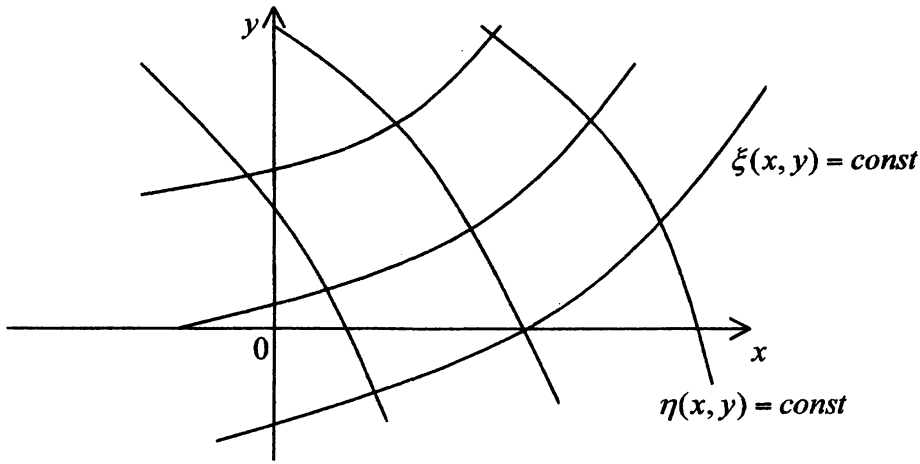


Рис. 28.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \qquad (139)$$

Аналогично

$$d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right).$$

Из формулы (138) получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \qquad (140)$$

Дифференциальные уравнения характеристик (139) и (140) удобно записать в виде одного уравнения

$$A(dy)^2 - Bdydx + C(dx)^2 = 0.$$

Тогда легко запомнить, как из уравнения (136) получаются уравнения характеристик (139) и (140).

Формулы (139), (140) и являются **уравнениями характеристик**. В частности для уравнения колебаний струны $U_{tt} = a^2 U_{xx}$ они имеют вид $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{a}, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}$.

Пример. Рассмотрим уравнение $y^2 U_{xx} - x^2 U_{yy} = 0$ в области $x > 0$,

$y > 0$. В указанной области данное уравнение имеет гиперболический тип. Приведем его к виду $U_{\xi\eta} = f(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$.

Составим уравнения характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Проинтегрировав эти дифференциальные уравнения методом разделения переменных, получим характеристики: $x^2 + y^2 = const$ и $x^2 - y^2 = const$ (см. рис.29).

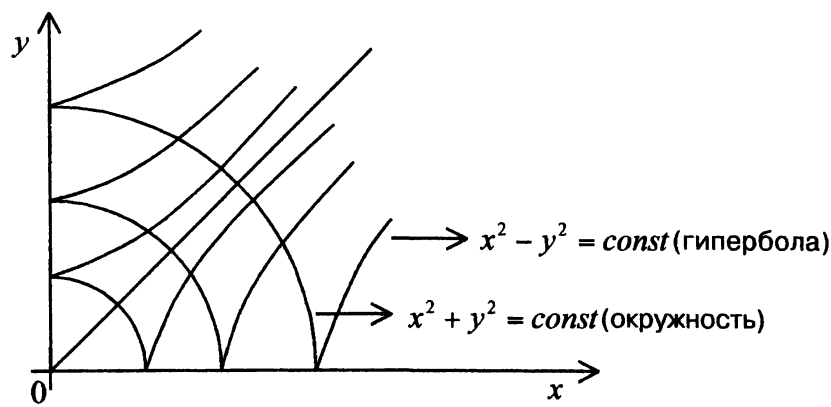


Рис. 29.

Следовательно, новые координаты определяются по формулам

$$\xi = x^2 + y^2, \eta = x^2 - y^2. \qquad (141)$$

Проделаем указанную замену в заданном уравнении. Для этого вычислим производные:

$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x = (U_\xi + U_\eta) \cdot 2x.$$

$$U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y = (U_\xi - U_\eta) \cdot 2y.$$

$$U_{xx} = (U_\xi + U_\eta)_x \cdot 2x + (U_\xi + U_\eta) \cdot 2 =$$

$$= (U_{\xi\xi} + U_{\eta\xi}) \cdot 4x^2 + (U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) \cdot 4x^2 + (U_\xi + U_\eta) \cdot 2.$$

$$U_{yy} = (U_\xi - U_\eta)_y \cdot 2y + (U_\xi - U_\eta) \cdot 2 =$$

$$= (U_{\xi\xi} - U_{\eta\xi}) \cdot 4y^2 - (U_{\xi\eta} - U_{\eta\eta}) \cdot 4y^2 + (U_\xi - U_\eta) \cdot 2.$$

После подстановки производных второго порядка в уравнение получим:

$$y^2U_{xx} - x^2U_{yy} = 16x^2y^2U_{\xi\eta} + 2(y^2 - x^2)U_{\xi} + 2(y^2 + x^2)U_{\eta} = 0.$$

Выразим из полученного уравнения смешанную производную второго порядка:

$$U_{\xi\eta} = \frac{(x^2 - y^2)U_{\xi} - (x^2 + y^2)U_{\eta}}{8x^2y^2}. \qquad (142)$$

Если теперь вместо $(x^2 - y^2)$ и $(x^2 + y^2)$ в (142) подставить их выражения из (141), то уравнение будет иметь вид

$$U_{\xi\eta} = \frac{\eta \cdot U_{\xi} - \xi \cdot U_{\eta}}{2(\xi^2 - \eta^2)}.$$

ГЛАВА II. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Краевые задачи для общих уравнений второго порядка эллиптического типа в настоящее время изучены не менее хорошо, чем краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона. Многие свойства решений этих задач аналогичны свойствам решений задач в частных случаях (так как основные свойства определяются типом уравнения). К сожалению, мы не можем изложить здесь теорию для общих уравнений. Однако те свойства, которые далее будут рассмотрены для частных случаев, позволят качественно представить и поведение решений в общем случае.

§1. Гармонические функции и их свойства

Рассмотрим уравнение Лапласа на плоскости

$$\Delta U \equiv U_{xx} + U_{yy} = 0 \qquad (143)$$

и в пространстве

$$\Delta U \equiv U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0. \qquad (144)$$

Функции $U = U(x, y)$ на плоскости и $U = U(x, y, z)$ в пространстве, имеющие непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющие, соответственно, уравнению Лапласа (143) или (144) в некоторой области D, называются **гармоническими** в этой области.

Простейшими примерами гармонических функций являются линейные функции: $U = ax + by + c$ на плоскости и $U = ax + by + cz + d$ в пространстве. Особый интерес представляют решения уравнений Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической (в случае двух независимых переменных – круговой) симметрией.

Решение $U = U(r)$, обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$U_{rr} + \frac{2}{r}U_r = 0,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Это уравнение получится, если подставить искомую функцию в уравнение Лапласа (144), записанное в сферических координатах (см. юниту 1, гл. I, §5). Интегрируя это уравнение, находим

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Полагая $C_1 = 1$, $C_2 = 0$,

получим функцию

$$U_0 = \frac{1}{r},$$

которую часто называют **фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве**. Функция U_0 является гармонической всюду в пространстве, кроме начала координат 0.

Аналогично, полагая $U = U(r)$ и пользуясь уравнением Лапласа в цилиндрических или полярных координатах (см. главу I, §5), найдем решения, обладающие цилиндрической или круговой симметрией:

$$U_{rr} + \frac{1}{r}U_r = 0 \Rightarrow U = C_1 \ln r + C_2, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Выбирая $C_1 = -1$ и $C_2 = 0$, будем иметь функцию

$$U_0 = \ln \frac{1}{r},$$

которую называют **фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости** (в случае двух независимых переменных). Функция U_0 удовлетворяет уравнению Лапласа (143) всюду на плоскости, кроме начала координат 0, где она обращается в бесконечность. Фундаментальные решения уравнения Лапласа имеют, помимо большого значения в теории гармонических функций, важный физический смысл.

Рассмотрим в пространстве электрическое поле, образованное точечным зарядом величины q, помещенным в начало координат. Тогда потенциал этого поля равен

$$U = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}.$$

Аналогично, если рассмотреть поле, создаваемое заряженной прямой, то потенциал такого поля будет равен

$$U = \frac{q_1}{2\pi} \ln \frac{1}{r},$$

где q_1 – линейная плотность заряда (то есть заряд, рассчитанный на единицу длины).

Более сложные примеры будут рассмотрены далее в §6, а сейчас

изучим свойства гармонических функций.

Теорема о среднем. Пусть функция $U = U(x, y)$ гармоническая в некотором круге D радиуса R с центром (x_0, y_0) и непрерывная в соответствующем замкнутом круге $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда значение этой функции в центре круга равно ее **среднему значению на окружности** Γ, ограничивающей данный круг, то есть

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi)d\varphi. \qquad (145)$$

При доказательстве этой теоремы применим интегральную формулу Пуассона для круга, которая будет доказана позже в §4 (частный случай этой формулы при $R = 1$ уже встречался в юните 1, гл. IV, §4). Она имеет вид (см. рис.30)

$$U(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x_0 + R\cos\varphi, y_0 + R\sin\varphi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \alpha) + \rho^2} d\varphi.$$

Если в этой формуле положить $\rho = 0$, то получится формула (145).

Теорему о среднем можно представить и в другой форме. Для этого запишем формулу (145) для произвольного круга радиуса r, где $0 \le r \le R$ (см. рис.31):

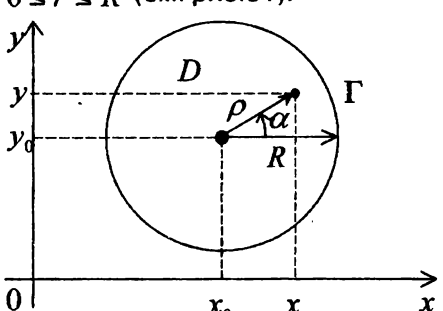


Рис. 30.

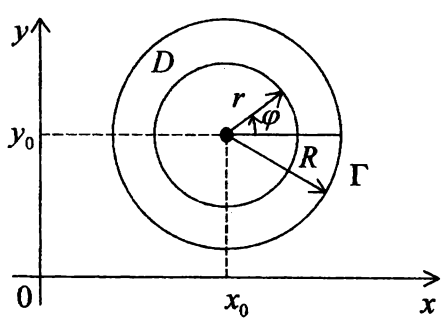


Рис. 31.

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)d\varphi \qquad (146)$$

Умножив обе части равенства (146) на rdr и проинтегрировав по r в пределах от 0 до R, получим:

$$U(x_0,y_0)\int_0^R rdr=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R U(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)rdr,$$

или

$$U(x_0,y_0)\cdot\frac{R^2}{2}=\frac{1}{2\pi}\iint_D U(x,y)dxdy,$$

где D – круг радиуса R. Разделив обе части полученного равенства на $R^2/2$, будем иметь

$$U(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi R^2}\iint_D U(x,y)dxdy. \qquad (147)$$

В правой части формулы (147) записано **среднее значение гармонической функции $U(x,y)$ в круге радиуса R**.

Имеет место и обратная теорема: если в некоторой области D функция $U=U(x,y)$ непрерывная и для каждой точки $(x_0,y_0)\in D$ выполняется теорема о среднем в любом сколь угодно малом круге с центром в точке (x_0,y_0), то эта функция гармоническая в D.

Из формулы (147) получается:

Следствие. Если функция $U=U(x,y)$ гармоническая в некотором круге D радиуса R и непрерывная в соответствующем замкнутом круге $\overline{D}=D\cup\Gamma$, то

$$|U(x_0,y_0)|\le\frac{1}{\sqrt{\pi}R}\sqrt{\iint_D U^2(x,y)dxdy}. \qquad (148)$$

Число $\|U\|=\sqrt{\iint_D U^2(x,y)dxdy}$ называется нормой функции $U=U(x,y)$ в области D, и неравенство (148) можно переписать в виде

$$|U(x_0,y_0)| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}R}\|U\|.$$

Неравенство (148) доказывается совсем просто, если воспользоваться известным неравенством Коши-Буняковского:

$$\iint\limits_D |U(x,y)|dxdy \le \sqrt{\iint\limits_D U^2(x,y)dxdy}\cdot\sqrt{\iint\limits_D 1^2 dxdy}.$$

Применим это неравенство к формуле (147):

$$|U(x_0,y_0)| \le \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_D |U(x,y)|dxdy \le \frac{1}{\pi R^2}\sqrt{\iint\limits_D U^2(x,y)dxdy}\cdot\sqrt{\pi R^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}R}\sqrt{\iint\limits_D U^2(x,y)dxdy}\,.$$ Что и требовалось доказать.

Замечание 1. В теории эллиптических уравнений наряду с гармоническими функциями часто встречаются и другие, так называемые суб– и супергармонические функции.

Функция $U(x,y)$, определенная и непрерывная в области D, называется **субгармонической** в D, если для всякой точки $(x_0,y_0)\in D$ в любом сколь угодно малом круге с центром в точке (x_0,y_0) выполняется неравенство

$$U(x_0,y_0) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma(x_0,y_0)} U(x,y)dl\,, \qquad (149)$$

где $\Gamma(x_0,y_0)$ – граница круга (окружность с центром в точке (x_0,y_0)). Если выполняется неравенство

$$U(x_0,y_0) \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma(x_0,y_0)} U(x,y)dl\,, \qquad (150)$$

то функция $U(x,y)$ называется **супергармонической** в D. Гармонические функции удовлетворяют и неравенству (149), и неравенству (150), поэтому они являются частными случаями суб– и супергармонических функций.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Если функция $U = U(x,y)$ имеет непрерывные частные

производные второго порядка в D, то она субгармонична в D (супергармонична в D) тогда и только тогда, когда $\Delta U \geq 0$ в D ($\Delta U \leq 0$ в D).

Гармонические функции, помимо вышеуказанных свойств, обладают и многими другими свойствами. Приведем еще два из них.

Неравенство Харнака. Пусть функция $U = U(x, y) \geq 0$, гармоническая в некотором круге D радиуса R с центром (x_0, y_0) и непрерывная в соответствующем замкнутом круге $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда при любом $0 \leq \rho < R$ она удовлетворяет неравенству

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} U(x_0, y_0) \leq U(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho} U(x_0, y_0).$$

Из неравенства Харнака следует теорема Лиувилля.

Теорема Лиувилля. Гармоническая на всей плоскости функция $U = U(x, y)$ не может быть ограниченной сверху или снизу, если она не постоянная.

Доказательство. Если функция $U = U(x, y)$ ограничена сверху, то $U_1 = -U(x, y)$ – ограничена снизу и тоже гармоническая. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда функция ограничена снизу: $U(x, y) \geq M$. Более того, можно считать, что $M = 0$. Действительно, $U(x, y) - M \geq 0$, а разность $(U - M)$ тоже гармоническая функция. Итак, предполагая существование гармонической во всей плоскости неотрицательной функции $U(x, y)$, мы докажем, что эта функция постоянная.

Воспользуемся неравенством Харнака $(0 < \rho < R)$:

$$\frac{R-\rho}{R+\rho} U(0,0) \leq U(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) \leq \frac{R+\rho}{R-\rho} U(0,0).$$

Если функция $U(x, y)$ гармоническая во всей плоскости $(U \geq 0)$, то, фиксировав произвольное $\rho > 0$ и неограниченно увеличивая R ($R \to \infty$), мы получим

$$U(0,0) \leq U(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) \leq U(0,0),$$

то есть $U(x,y) \equiv U(0,0)$. Теорема Лиувилля доказана.

Замечание 2. Гармонические функции в пространстве обладают аналогичными свойствами. Приведем формулировку одного из них.

Теорема о среднем. Пусть функция $U = U(x,y,z)$ гармоническая в некотором шаре D радиуса R с центром (x_0, y_0, z_0) и непрерывная в соответствующем замкнутом шаре $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда значение этой функции в центре шара равно:

а) ее среднему значению на сфере Γ, ограничивающей данный шар, то есть

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Gamma} U d\sigma \ ;$$

б) ее среднему значению в шаре D, то есть

$$U(x_0, y_0, z_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_{D} U dx dy dz.$$

Другие свойства гармонических функций в пространстве предлагаем Вам сформулировать самостоятельно.

Замечание 3. Гармонические функции на плоскости имеют особое значение благодаря их связи с аналитическими функциями комплексного переменного. Известно, что аналитическая функция $f(z) \equiv U(x,y) + iV(x,y)$, где $z = x + iy$ –комплексное число, удовлетворяет условиям Коши-Римана

$$U_x = V_y \text{ и } U_y = -V_x. \qquad (151)$$

Дифференцируя первое равенство формулы (151) по x, а второе по y, получим:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \text{ или } \Delta U = 0.$$

Подобным образом, меняя порядок дифференцирования, находим:

$$V_{xx} + V_{yy} = 0, \text{ или } \Delta V = 0.$$

Следовательно, действительная и мнимая части $U(x,y)$ и $V(x,y)$ аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Обычно говорят, что U и V, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, являются сопряженными гармоническими функциями.

§2. Принцип максимума

Среди свойств, которыми обладают гармонические функции, одно свойство, называемое принципом максимума, несомненно имеет ведущее значение.

Теорема. Если функция $U = U(x, y)$ гармоническая в ограниченной области D и непрерывная в соответствующей замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$, то она не может внутри этой области принимать значения, бóльшие чем максимум ее значений на границе Γ, и меньшие, чем минимум ее значений на Γ, то есть

$$\min_{(x,y)\in\Gamma} U(x,y) \le U(x,y) \le \max_{(x,y)\in\Gamma} U(x,y),\ (x,y)\in D. \quad (152)$$

Доказательство. Обозначим через m максимум значений $U(x, y)$ на Γ и предположим, что максимальное значение функции равно $U(x_0, y_0) = M > m$ и принимается во внутренней точке (x_0, y_0) области D. Составим вспомогательную функцию

$$V = U(x,y) + \frac{M-m}{2d^2}\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right],$$

где d – диаметр области D (максимальное расстояние между любыми двумя точками, принадлежащими области). Из неравенства $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le d^2$ вытекает, что на Γ

$$V(x,y) \le m + \frac{M-m}{2d^2}d^2 = \frac{M+m}{2} < M.$$

В то же время $V(x_0, y_0) = U(x_0, y_0) = M$. Отсюда следует, что максимум $V(x, y)$ внутри D не меньше, чем M, а следовательно, больше чем максимум V на Γ. Этот максимум, очевидно, достигается в некоторой точке (x, y) области D.

В точке максимума, как известно, $V_x = V_y = 0$, $V_{xx} \le 0$, $V_{yy} \le 0$, а следовательно, $V_{xx} + V_{yy} \le 0$. Однако

$$V_{xx}+V_{yy}=U_{xx}+U_{yy}+\frac{M-m}{2d^2}(2+2)=2\frac{M-m}{d^2}>0.$$

Полученное противоречие означает, что предположение $M>m$ неверно, и мы доказали, что внутри D

$$U(x,y)\le \max_{(x,y)\in\Gamma} U.$$

Для доказательства неравенства, ограничивающего $U(x,y)$ снизу

$$U(x,y)\ge \min_{(x,y)\in\Gamma} U,$$

достаточно применить уже полученный результат к функции – $U(x,y)$, которая, очевидно, тоже является гармонической. Теорема о максимуме и минимуме доказана.

На самом деле, если гармоническая функция $U(x,y)\not\equiv const$, то она не может принимать внутри области D значения, равные $\max\limits_{\Gamma} U$ и $\min\limits_{\Gamma} U$, то есть

$$\min_{(x,y)\in\Gamma} U<U(x,y)<\max_{(x,y)\in\Gamma} U,\ (x,y)\in D.$$

Это утверждение называется **(строгим) принципом максимума** (в отличие от предыдущего утверждения – "нестрогого" принципа максимума). Его доказательство сложнее, и мы доказывать это утверждение не будем. Сформулируем следствия из него.

Следствие 1. Если функция $U=U(x,y)$ непрерывная в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ и гармоническая в D, то

$$|U(x,y)|\le \max_{(x,y)\in\Gamma}|U(x,y)|,\ (x,y)\in\overline{D}. \qquad (153)$$

В частности, если $U\big|_{\Gamma}=0$, то $U(x,y)\equiv 0$ в D.

Это утверждение вытекает из (152):

$$-\max_{(x,y)\in\Gamma}|U|\le \min_{(x,y)\in\Gamma} U\le U(x,y)\le \max_{(x,y)\in\Gamma} U\le \max_{(x,y)\in\Gamma}|U|,(x,y)\in\overline{D}.$$

Объединяя эти неравенства в систему, будем иметь:

$$\begin{cases} U(x,y) \le \max\limits_{(x,y)\in\Gamma} |U| \\ U(x,y) \ge -\max\limits_{(x,y)\in\Gamma} |U| \end{cases} \Leftrightarrow |U(x,y)| \le \max_{(x,y)\in\Gamma} |U|.$$

Из принципа максимума следуют и многие другие важные свойства гармонических функций. Однако сейчас мы сформулируем и докажем лишь две теоремы.

Напомним постановку задачи Дирихле (юнита 1, гл. III): В области D найти решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничному условию $U/\Gamma = f(s)$.

Теорема о единственности решения задачи Дирихле.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области (если оно существует) единственное.

Доказательство. Пусть задача имеет два решения $U = U_1(x,y)$ и $U = U_2(x,y)$, удовлетворяющих одному и тому же условию Дирихле на границе Γ. Тогда их разность $V = U_1 - U_2$ тоже будет непрерывной и гармонической функцией и на границе будет обращаться в нуль. По принципу максимума

$$0 = \min_{(x,y)\in\Gamma} V(x,y) \le V(x,y) \le \max_{(x,y)\in\Gamma} V(x,y) = 0,\ (x,y)\in\overline{D}.$$

Следовательно, $V = U_1 - U_2 \equiv 0$, то есть $U_1(x,y) \equiv U_2(x,y)$. Единственность доказана. Вторая теорема имеет еще более длинное название.

Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Дирихле от граничных условий.

Пусть U_1 и U_2 – две гармонические в области D функции, граничные значения которых равны, соответственно, $f_1(s)$ и $f_2(s)$, $s\in\Gamma$. Если $|f_1(s) - f_2(s)| \le \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $|U_1 - U_2| \le \varepsilon$ всюду в рассматриваемой области D.

Доказательство. Рассмотрим функцию $V = U_1 - U_2$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в области D и принимающую на границе Γ значения $f(s) = f_1(s) - f_2(s)$. На основании следствия 1 (см. формулу (153)) мы можем утверждать, что

$$|V| \equiv |U_1 - U_2| \le \max_{s\in\Gamma} |f(s)| \equiv \max_{s\in\Gamma} |f_1(s) - f_2(s)| \le \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Эти теоремы имеют большое значение в вопросе о корректности задачи Дирихле, который мы рассмотрим в дальнейшем (см. гл. III).

Отметим, что принцип максимума выполняется и для функций, гармонических в пространственных областях.

§3. Функция Грина. Примеры

В этом параграфе будем рассматривать уравнение Лапласа $\Delta U = 0$ в ограниченных областях D, расположенных на плоскости или в пространстве. Точки $P(x,y)$ и $P_0(x_0,y_0)$ на плоскости (или $P(x,y,z)$ и $P_0(x_0,y_0,z_0)$ в пространстве) принадлежат области D и $r = |P_0P| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ (или $r = |P_0P| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$) – расстояние между точками P_0 и P. Предположим, что на границе области D задано нулевое условие Дирихле.

Функция $G(P,P_0)$ называется **функцией Грина задачи Дирихле** в области D, если для любой фиксированной точки $P_0 \in D$ она, как функция от P, удовлетворяет следующим условиям: (i)непрерывная в $\overline{D}$ всюду, кроме точки P_0, и $G(P,P_0) = 0$ на границе D; (ii)гармоническая в D за исключением точки P_0; (iii)в случае плоскости $G(P,P_0) - \ln\frac{1}{r}$ остается гармонической функцией в точке P_0; в случае пространства функция $G(P,P_0) - \frac{1}{r}$ остается гармонической в точке P_0.

Как следует из определения, функция Грина непрерывна и гармонична всюду в области D за исключением точки P_0, в которой

она имеет особенность типа $\ln\frac{1}{r}$ в плоскости или $\frac{1}{r}$ в пространстве. Функцию Грина иногда называют функцией источника.

Функция Грина $G(P,P_0)$ (если она существует) однозначно определяется свойствами (i)–(iii). Кроме того, $G(P,P_0)>0$ в области D. Рассмотрим, к примеру, плоскую область D. Для того, чтобы доказать единственность функции Грина, предположим противное: пусть G_1 и G_2 – две функции, обладающие свойствами (i)–(iii) для заданных области D и точки $P_0\in D$. Тогда (G_1-G_2) остается гармонической в любой точке области D, включая и точку P_0, поскольку вблизи точки P_0 можно записать

$$G_1(P,P_0)-G_2(P,P_0)=\left(G_1(P,P_0)-\ln\frac{1}{r}\right)-\left(G_2(P,P_0)-\ln\frac{1}{r}\right). \quad (154)$$

Каждая скобка в правой части (154) представляет собой функцию, гармоническую всюду в D (см. свойство (iii)), поэтому и разность G_1-G_2 – функция гармоническая всюду в D. Кроме того, на границе D функция $G_1-G_2\equiv 0$. Следовательно, по принципу максимума $G_1\equiv G_2$ в области D.

Далее, если D_1 – часть области D, находящаяся вне малой окрестности точки P_0, то, согласно условиям (i)–(iii), функция G непрерывна в $\overline{D_1}$, гармонична в D_1 и на границе D_1 принимает неотрицательные значения (так как $G(P,P_0)\to+\infty$ при $r\to 0$). Поэтому по принципу максимума $G(P,P_0)\geq 0$ в D_1, причем нулевое значение внутри области D_1 функция принимать не может. Это означает, что $G(P,P_0)>0$ всюду в D.

Пример 1. На плоскости рассмотрим круг радиуса R с центром в начале координат. Построим **функцию Грина в круге**. При построении

этой функции нам понадобится понятие сопряженных точек. Точки P_0 и P^* называются **сопряженными относительно окружности**, если они лежат на одном луче, исходящем из центра О окружности, и произведение их расстояний от центра равно квадрату радиуса: $|OP_0| \cdot |OP^*| = R^2$ (см. рис.33).

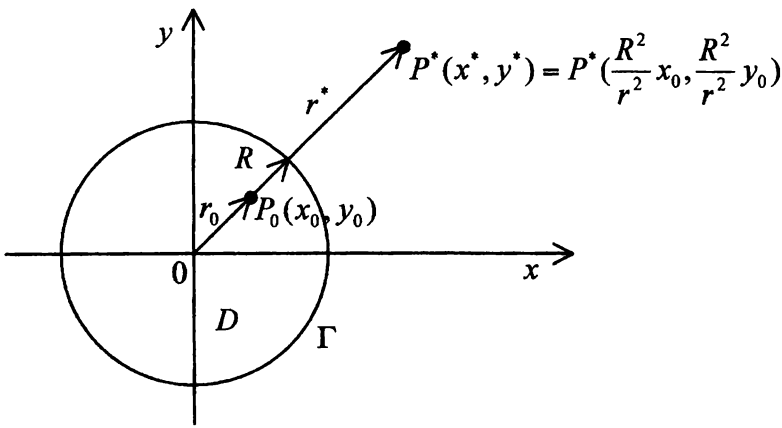


Рис. 33.

Обозначим через $r_0 = |OP_0|$ и $r^* = |OP^*|$. Тогда $r_0 \cdot r^* = R^2$. Так как точки P_0 и P^* лежат на одном луче, выходящем из начала координат, то

$$\frac{x^*}{x_0} = \frac{y^*}{y_0} = \frac{r^*}{r_0} = \frac{R^2}{r_0^2} \Rightarrow x^* = \frac{R^2}{r_0^2}x_0, y^* = \frac{R^2}{r_0^2}y_0.$$

Возьмем функцию $G(P, P_0) = \ln\frac{1}{r} - \ln\frac{R/r_0}{r_1}$, (155)

где $r = |P_0P|$, $r_1 = |PP^*|$ (см. рис.34).

По теореме косинусов $r = \sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0\cos(\varphi - \varphi_0)}$, где $\rho = |OP|$, $r_1 = \sqrt{\rho^2 + r^{*2} - 2\rho r^*\cos(\varphi - \varphi_0)}$. Воспользовавшись равенством

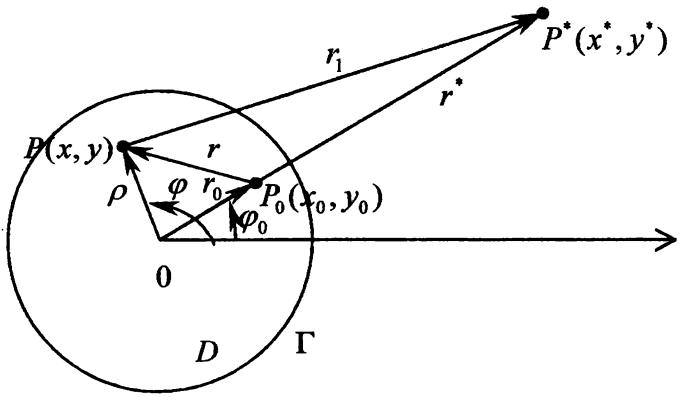


Рис. 34.

$r_0 \cdot r^* = R^2$, получим $r_1 = \sqrt{\rho^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2\rho\frac{R^2}{r_0}\cos(\varphi - \varphi_0)}$. Таким образом, величины r и r_1 выражаются через R, ρ, r_0, φ и φ_0, и, в конечном счете, через R, x, y, x_0, y_0. Покажем, что функция $G(P, P_0)$ в (155) удовлетворяет пунктам (i)–(iii) определения. Очевидно, что функция непрерывна всюду в замкнутом круге кроме точки P_0 (когда $r = 0$). На границе круга расстояние $\rho = R$ и, следовательно,

$$r = \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad r_1 = \sqrt{R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2R\frac{R^2}{r_0}\cos(\varphi - \varphi_0)} =$$

$$= \frac{R}{r_0}\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{R}{r_0} \cdot r.$$

Отсюда $G(P, P_0)\big|_\Gamma = \ln\frac{1}{r} - \ln\frac{(R/r_0)}{(R/r_0)r} = 0$. Функция $\ln\frac{R/r_0}{r_1}$ является гармонической всюду в области D, так как точка P принадлежит области, а точка P^* лежит вне области D и, следовательно, $r_1 > 0$. Гармоничность функции легко проверяется, если записать оператор Лапласа в полярной системе координат с полюсом в точке P^*:

$$\Delta \ln \frac{R/r_0}{r_1} = \Delta \ln(R/r_0) - \Delta \ln r_1 \equiv -(\ln r_1)'' - \frac{1}{r_1}(\ln r_1)' = \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_1^2} = 0.$$

Поэтому функция $G(P,P_0)$ гармоническая в области D всюду, кроме точки P_0, а разность $G(P,P_0) - \ln\frac{1}{r}$ гармоническая и в точке P_0.

Аналогично строится функция Грина для шара радиуса R. Она имеет вид $G(P,P_0) = \frac{1}{r} - \frac{R/r_0}{r_1}$, где $r = |P_0P|$, $r_1 = |PP^*|$, $r_0 = |OP_0|$. Точка $P^*(x^*,y^*,z^*)$ в этом случае – сопряженная точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ относительно сферы радиуса R с центром в точке O, то есть $|OP_0|\cdot|OP^*| = R^2$. Координаты x^*, y^*, z^* вычисляются по формулам:

$$x^* = \frac{R^2}{r_0^2}x_0, y^* = \frac{R^2}{r_0^2}y_0, z^* = \frac{R^2}{r_0^2}z_0.$$

Пример 2. Функцию Грина можно рассматривать не только для ограниченных, но и для неограниченных областей. В качестве примера построим **функцию Грина для полуплоскости**. Для этого определим **точки, сопряженные относительно прямой**: точки P_0 и P^* называются сопряженными относительно прямой, если они симметричны относительно этой прямой (см. рис.35).

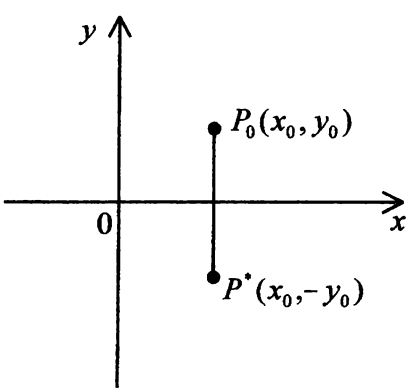


Рис. 35.

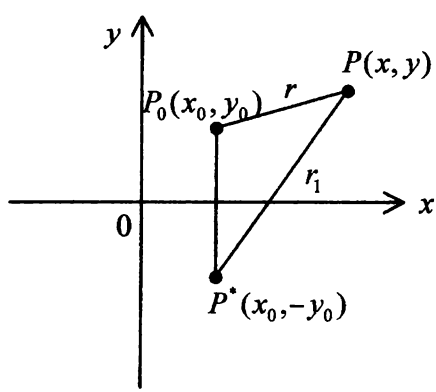


Рис. 36.

Функция $G(P,P_0)=\ln\frac{1}{r}-\ln\frac{1}{r_1}$,

где $r=|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $r_1=|PP^*|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}$ (см. рис.36), удовлетворяет свойствам (i)–(iii) в полуплоскости $y>0$. В самом деле, на границе области при $y=0$ расстояние $r=r_1$, поэтому $G(P,P_0)\big|_{y=0}=0$. Гармоничность функции $\ln\frac{1}{r_1}$ всюду в области $y>0$ проверяется непосредственно вычислением частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{1}{r_1}\right)=\frac{d}{dr_1}\left(\ln\frac{1}{r_1}\right)\cdot\frac{\partial r_1}{\partial x}=-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{x-x_0}{r_1};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{r_1}\right)=\frac{d}{dr_1}\left(\ln\frac{1}{r_1}\right)\cdot\frac{\partial r_1}{\partial y}=-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{y+y_0}{r_1};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\frac{1}{r_1}\right)=\frac{2}{r_1^3}\cdot\frac{(x-x_0)^2}{r_1}-\frac{1}{r_1^2};\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\frac{1}{r_1}\right)=\frac{2}{r_1^3}\cdot\frac{(y+y_0)^2}{r_1}-\frac{1}{r_1^2}.$$

Поэтому

$$\Delta\left(\ln\frac{1}{r_1}\right)=\frac{2(x-x_0)^2}{r_1^4}-\frac{1}{r_1^2}+\frac{2(y+y_0)^2}{r_1^4}-\frac{1}{r_1^2}=\frac{2(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{r_1^4}-\frac{2}{r_1^2}\equiv 0.$$

Следовательно, функция $G(P,P_0)$ гармоническая в области $y>0$ всюду, кроме точки P_0, а разность $G(P,P_0)-\ln\frac{1}{r}$ гармоническая и в точке P_0.

Для полупространства $z>0$ функция Грина имеет вид $G(P,P_0)=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}$, где $r=|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, $r_1=|PP^*|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}$.

§4. Метод функций Грина решения задачи Дирихле

Метод функций Грина решения задачи Дирихле основывается на формулах Грина. На плоскости эта формула имеет следующий вид: если функции $U = U(x, y)$ и $V = V(x, y)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка в ограниченной области D и непрерывны в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$, то

$$\oint_{\Gamma}\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dl = \iint_{D}(U\Delta V - V\Delta U)dxdy,$$

где $\frac{\partial U}{\partial n}$ и $\frac{\partial V}{\partial n}$ – производные по направлению внешней нормали к Γ, а кривая Γ – положительно ориентирована (то есть направление интегрирования таково, что область D при интегрировании остается слева). Из этой формулы легко выводится обобщенная формула Грина

$$\oint_{\Gamma}\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dl + \oint_{C}\left(U\frac{\partial V}{\partial n_1} - V\frac{\partial U}{\partial n_1}\right)dl = \iint_{D}(U\Delta V - V\Delta U)dxdy, \quad (156)$$

где C – замкнутая кривая, лежащая внутри кривой Γ, а D – область, заключенная между Γ и C (см. рис. 37). Кривая C также положительно ориентирована, а $\overline{n}_1$ – направление внешней нормали к C.

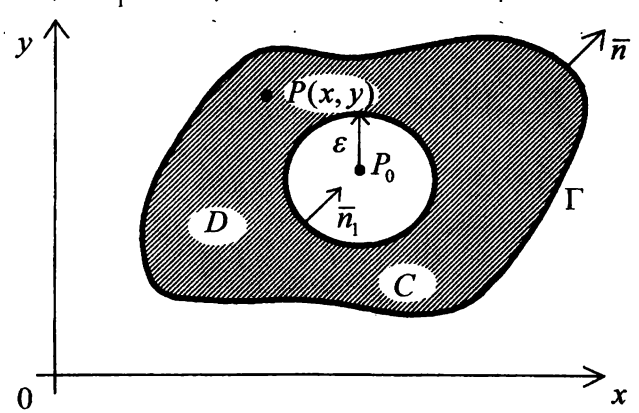


Рис. 37.

Аналогичная формула имеется и в случае пространства, однако мы ее не приводим, поскольку в дальнейшем метод функций Грина

подробно излагается только для плоских областей. Для искомой гармонической функции U, удовлетворяющей условию Дирихле $U|_{\Gamma} = f(s), s \in \Gamma$, и функции $V = G(P, P_0)$ – функции Грина – формула (156) будет иметь вид:

$$\oint_{\Gamma} U \frac{\partial G}{\partial n} dl + \oint_{C} \left(U \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial U}{\partial n_1} \right) dl = 0, \qquad (157)$$

где C – окружность радиуса ε с центром в точке P_0 (см. рис.37). Остальные слагаемые в данном случае будут равны нулю, так как $G|_{\Gamma} = 0$ и $\Delta U = \Delta V = 0$ в D. Вычислим интеграл $\oint_{C} \left(U \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial U}{\partial n_1} \right) dl$. Для этого введем полярные координаты (r, φ) с полюсом в точке P_0. Тогда $r = |P_0 P|, \frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial r}$, на окружности C расстояние $r = \varepsilon$ и $dl = \varepsilon d\varphi$. Поэтому

$$\oint_{C} \left(U \frac{\partial G}{\partial n_1} - G \frac{\partial U}{\partial n_1} \right) dl = -\varepsilon \int_{0}^{2\pi} \left(U \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial U}{\partial r} \right)\Bigg|_{r=\varepsilon} d\varphi.$$

Из определения функции Грина вытекает, что $G(P, P_0) = \ln \frac{1}{r} + g(P, P_0)$, где $g(P, P_0)$ – гармоническая функция всюду в области D. Это означает, что $g(P, P_0)$ и ее производная по нормали n_1 ограничены в D, то есть

$$G|_{r=\varepsilon} = \ln \frac{1}{\varepsilon} + g(P, P_0)|_{r=\varepsilon}, \quad \frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial r}\Big|_{r=\varepsilon}.$$

Кроме того, функция U и ее производная $\frac{\partial U}{\partial n_1}$ также ограничены в D. Поэтому

$$\varepsilon\int_0^{2\pi}\left(U\frac{\partial G}{\partial r}-G\frac{\partial U}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=\varepsilon}d\varphi=-\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}U(x_0+\varepsilon\cos\varphi,y_0+\varepsilon\sin\varphi)d\varphi-$$

$$-\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\cdot\alpha(\varepsilon)+\varepsilon\cdot\beta(\varepsilon),$$ где $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ – ограниченные величины при $\varepsilon\to 0$.

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_C\left(U\frac{\partial G}{\partial n_1}-G\frac{\partial U}{\partial n_1}\right)dl=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{2\pi}U(x_0+\varepsilon\cos\varphi,y_0+\varepsilon\sin\varphi)d\varphi-\right.$$

$$\left.-\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\cdot\alpha(\varepsilon)+\varepsilon\cdot\beta(\varepsilon)\right)=2\pi U(x_0,y_0).$$

Таким образом, из формулы (157) с учетом граничного условия $U|_\Gamma=f(s)$ вытекает

$$U(x_0,y_0)=-\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma f(s)\frac{\partial G}{\partial n}dl. \qquad (158)$$

Эта формула дает **решение задачи Дирихле для ограниченной области** на плоскости, если известна функция Грина G.

В пространстве доказывается аналогичная формула, дающая интегральное представление решения задачи Дирихле, если известна соответствующая функция Грина. Она имеет вид

$$U(x_0,y_0,z_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma f(s)\frac{\partial G}{\partial n}ds,$$

где Γ – положительно ориентированная поверхность, ограничивающая область D в пространстве, и $f(s)$ – граничные значения гармонической функции.

Замечание. Метод функций Грина позволяет получать решения многих задач в областях различной формы. Однако для каждой области (а точнее, для каждого оператора, стоящего в левой части граничного условия) и для каждого уравнения нужно находить свою функцию Грина, что является часто непростой задачей. В том случае, когда функция Грина известна, например, для круга, шара или других простых областей (см.§3),

решение соответствующей задачи выводится несложными вычислениями.

С помощью формулы (158) легко получается **интегральная формула Пуассона для круга**. Для этого нужно вычислить производную $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ функции Грина для круга. Рассмотрим сначала круг радиуса R с центром в начале координат (см. рис.34). Функция $G(P,P_0)$ для этого круга имеет вид (см. §3):

$$G(P,P_0)=\ln\frac{1}{r}-\ln\frac{R/r_0}{r_1}=-\ln r+\ln r_1-\ln\frac{R}{r_0}.$$

Так как направление внешней нормали к Γ совпадает с направлением полярного радиуса ρ, то

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial \rho}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\rho-r_0\cos(\varphi-\varphi_0)}{r}+\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\rho-\dfrac{R^2}{r_0}\cos(\varphi-\varphi_0)}{r_1}.$$

На границе Γ расстояние $\rho=R$ и $r_1=\dfrac{R}{r_0}\cdot r$, поэтому

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}=-\frac{R-r_0\cos(\varphi-\varphi_0)}{r^2}+\frac{r_0^2}{R^2}\frac{R-\dfrac{R^2}{r_0}\cos(\varphi-\varphi_0)}{r^2}=-\frac{R^2-r_0^2}{Rr^2}.$$

Подставим полученное выражение для производной в формулу (158):

$$U(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}f(s)\frac{R^2-r_0^2}{Rr^2}dl. \qquad (159)$$

Так как точка $P_0(x_0,y_0)$ может быть произвольной внутри круга, обозначим ее координаты через $x_0=\rho\cos\alpha$, $y_0=\rho\sin\alpha$, (ρ,α) – полярная система координат с полюсом в точке О. Тогда окончательно формула (159) примет вид:

$$U(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}d\varphi. \quad (160)$$

Из формулы (160) нетрудно получить **интегральную формулу Пуассона для произвольного круга** радиуса R с центром (x_0,y_0). Для этого преобразуем данный круг с помощью замены переменных $x=x_0+\rho\cos\alpha, y=y_0+\rho\sin\alpha$ в круг того же радиуса, но с центром в начале координат, запишем для него формулу (160), а затем вернемся к прежним переменным. В результате будем иметь формулу

$$U(x,y)\equiv U(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}d\varphi.$$

Функция $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}$ называется **ядром Пуассона** для круга. Отметим некоторые свойства ядра Пуассона.

1. Ядро Пуассона положительно при $\rho<R$, при $\rho=R$ оно всюду равно нулю, кроме точки $\alpha=\varphi$. Вблизи точки $(x_0+R\cos\varphi,y_0+R\sin\varphi)$ оно неограничено.

2. Если точка $(x,y)\equiv(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\sin\alpha)$ меняется внутри круга, то ядро Пуассона есть гармоническая функция от (x,y).

3. При $\rho<R$ справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}d\varphi\equiv 1. \quad (161)$$

Свойство 1 очевидно, так как $2R\rho<R^2+\rho^2$ при $\rho\neq R$. На луче $\alpha=\varphi$ ядро Пуассона имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho+\rho^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{R+\rho}{R-\rho}\to\infty \text{ при } \rho\to R.$$

Свойства 2 и 3 проверяются непосредственно с помощью

вычислений. Однако свойство 3 можно доказать и более красивым способом. А именно, если рассмотреть задачу Дирихле в круге радиуса R с граничным условием $U|_{\Gamma} \equiv 1$, то решение такой задачи определяется формулой Пуассона (160):

$$U(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}d\varphi.$$

С другой стороны, функция $U \equiv 1$ также является решением задачи Дирихле в круге с тем же граничным условием. В силу единственности решения задачи Дирихле получаем равенство (161).

§5. Задача Дирихле для внешности круга и полуплоскости

Формулировка внешней задачи Дирихле на плоскости имеет некоторые особенности. Напомним эту формулировку. Пусть D – плоская ограниченная область, граница которой – замкнутая кривая Γ. Обозначим через $D_1 = R^2 \setminus \overline{D}$ неограниченную область, границей которой также является кривая Γ (см. рис.38).

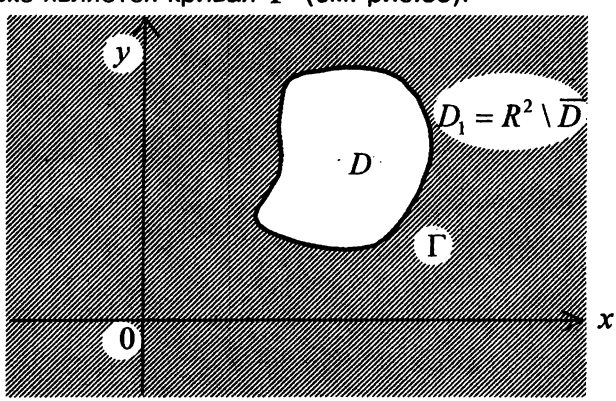


Рис. 38.

Внешняя задача Дирихле ставится следующим образом: требуется найти функцию U, удовлетворяющую условиям:

1) $\Delta U = 0$ в рассматриваемой бесконечной области D_1;

2) функция U всюду непрерывна, включая границу Γ;

3) $U|_{\Gamma} = f(s)$, $s \in \Gamma$, где f – заданная на Γ функция;

4) $U(x,y)$ ограничена в бесконечности, то есть существует такое число N, что $|U(x,y)| \le N$ при $(x,y) \in \overline{D}_1$.

Для внешней задачи Дирихле справедлива следующая теорема.

Теорема. Решение внешней задачи Дирихле единственно и непрерывно зависит от граничных значений.

Доказательство этих утверждений следует из неравенства

$$|U(x,y)| \le \max_{(x,y)\in\Gamma} |U(x,y)|, \ (x,y) \in D_1. \qquad (162)$$

Неравенство (162) выполняется для любых функций, гармонических в области D_1, непрерывных в замкнутой области $\overline{D}_1 = D_1 \cup \Gamma$ и ограниченных в бесконечности.

В теории гармонических функций доказывается, что внешняя задача Дирихле всегда разрешима, если граничная функция $f(s)$ – непрерывная, а кривая Γ – достаточно гладкая.

В случае внешности круга радиуса R с центром в точке О решение задачи Дирихле задается в виде интегральной формулы Пуассона

$$U(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{\rho^2 - R^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}d\varphi. \quad (163)$$

Формула (163) очень похожа на (160), только сейчас (при $\rho > R$) в ядре Пуассона величины ρ и R поменялись местами. В остальном ядро Пуассона здесь обладает теми же свойствами, как и для круга.

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для полуплоскости $y > 0$. Пусть на границе Γ, то есть на прямой $y = 0$, задано условие $U|_{y=0} = f(x)$. Поскольку функция Грина для полуплоскости известна (см. §3), нетрудно получить соответствующую интегральную формулу Пуассона. Для этого вычислим $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma} \equiv -\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0}$. Функция $G(P,P_0) = \ln\frac{1}{r} - \ln\frac{1}{r_1}$, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, $r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}$. Поэтому

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial y}=\frac{1}{r^2}\cdot(y-y_0)-\frac{1}{r_1^2}(y+y_0).$$

Если $y=0$, то $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\frac{-2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}$. После подстановки производной в формулу (158) решение $U(x_0,y_0)$ запишется в виде

$$U(x_0,y_0)=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{(x-x_0)^2+y_0^2}. \qquad (164)$$

Формула (164) называется **интегральной формулой Пуассона для полуплоскости**. Она содержит несобственный интеграл, для сходимости которого надо налагать дополнительные условия на граничную функцию $f(x)$. Например, достаточно, чтобы граничная функция была ограниченной на бесконечности. При выводе формул (163), (164) используют формулу (158), предварительно обобщенную на случай неограниченных областей. Функция $\frac{y_0}{\pi}\cdot\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}$ называется **ядром Пуассона для полуплоскости**. Она обладает свойствами, аналогичными свойствам ядра Пуассона для круга. В частности,

$$\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-x_0)^2+y_0^2}\equiv 1 \text{ при } y_0>0.$$

§6. Элементы теории потенциала

Теория потенциала, основы которой были заложены А.М. Ляпуновым в конце прошлого века, дает новые примеры гармонических функций. Как следует из названия, эта теория имеет глубокий физический смысл, связанный с теорией векторных полей.

В математической физике рассматривают следующие **потенциалы**:

1) **объемный потенциал**

$$U(P)=\iiint_D\frac{1}{r(P,P_0)}\rho(P_0)dV, \qquad (165)$$

где D – некоторая ограниченная область в пространстве, $P_0\in D$,

$r(P,P_0)=|PP_0|$ – расстояние между точками P и P_0;

2) **потенциал простого слоя**

$$U(P)=\iint_{\Gamma}\frac{1}{r(P,P_0)}\mu(P_0)ds, \qquad (166)$$

где Γ – ориентированная ограниченная поверхность в пространстве, $P_0\in\Gamma$, $r(P,P_0)=|PP_0|$;

3) **потенциал двойного слоя**

$$U(P)=\iint_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(P,P_0)}\right)\sigma(P_0)ds, \qquad (167)$$

где Γ – ориентированная ограниченная поверхность в пространстве, $\overline{n}$ – нормаль к Γ, согласованная с ориентацией поверхности (в частности, если Γ замкнутая поверхность, то $\overline{n}$ – внешняя нормаль).

Функции $\rho(P_0),\mu(P_0),\sigma(P_0)$ называются плотностями потенциалов. Сформулируем основные свойства потенциалов.

Свойства потенциалов

1. Если плотность $\rho(P_0)$ – непрерывная функция, то объемный потенциал $U(P)$, определяемый по формуле (165), гармоничен в $D_1=R^3\setminus\overline{D}$ и $U(P)\to 0$ при $P\to\infty$.

2. Если плотность $\mu(P_0)$ – непрерывная функция, то потенциал простого слоя, определяемый по формуле (166), является гармонической функцией вне поверхности Γ и стремится к нулю при $P\to\infty$.

3. Если плотность $\sigma(P_0)$ – непрерывная функция, то потенциал двойного слоя, определяемый по формуле (167), является гармонической функцией вне поверхности Γ и стремится к нулю при $P\to\infty$.

Физический смысл потенциалов

1. Если электрическое поле образовано заряженным телом D и объемная плотность заряда равна $\rho(P_0)$, $P_0\in D$, то потенциал в точке

P вычисляется по формуле (165).

2. Если поле образовано заряженной поверхностью Γ и поверхностная плотность заряда равна $\mu(P_0)$, $P_0 \in \Gamma$, то потенциал такого поля в точке P вычисляется по формуле (166). Потенциал двойного слоя (167) возникает в случае, когда на поверхности Γ сосредоточены диполи.

В этих случаях потенциалы (165), (166), (167) называют кулоновскими потенциалами.

Потенциалам в пространстве можно придать и другой физический смысл. Когда поле является гравитационным (полем тяготения масс), потенциал (165) называют ньютоновым потенциалом.

На плоскости также можно определить потенциалы, которые в отличие от пространственных называются логарифмическими потенциалами. Они имеют вид:

1) потенциал площади

$$U(P) = \iint\limits_D \rho(P_0) \ln \frac{1}{r(P, P_0)} ds,$$

где D – некоторая ограниченная плоская область, $P_0 \in D$, $r(P, P_0) = |PP_0|$ – расстояние между точками P и P_0;

2) потенциал простого слоя

$$U(P) = \int\limits_\Gamma \mu(P_0) \ln \frac{1}{r(P, P_0)} dl,$$

где Γ – ориентированная кривая в плоскости, $P_0 \in \Gamma$, $r(P, P_0) = |PP_0|$;

3) потенциал двойного слоя

$$U(P) = \int\limits_\Gamma \sigma(P_0) \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r(P, P_0)} \right) dl,$$

где Γ – ориентированная кривая в плоскости, $P_0 \in \Gamma$, $\overline{n}$ – нормаль к Γ, согласованная с ориентацией кривой (в частности, если Γ – замкнутая кривая, то $\overline{n}$ – внешняя нормаль).

Функции $\rho(P_0), \mu(P_0)$ и $\sigma(P_0)$ называются плотностями потенциалов. Если эти функции непрерывные, то потенциал площади

является гармонической функцией вне области D, а потенциалы простого и двойного слоя – гармонические функции вне кривой Γ. При $P \to \infty$ логарифмические потенциалы площади и простого слоя, в отличие от ньютоновых потенциалов, имеют логарифмическую особенность, то есть стремятся к бесконечности примерно как $\ln \frac{1}{r(P,0)}$. Потенциал двойного слоя на бесконечности стремится к нулю.

§7. Применение потенциалов к решению краевых задач

Потенциалы, определенные в предыдущем параграфе, являются удобным аналитическим аппаратом для решения краевых задач.

1. **Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана**. В пространственном случае решение внутренней задачи Дирихле при краевом условии $U\big|_{\Gamma} = f(P)$ ищут в виде ньютонова потенциала двойного слоя $U(P) = \iint\limits_{\Gamma} \sigma(P_0) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(P,P_0)}\right) ds$, а решение внешней задачи Неймана при краевом условии $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(P)$ отыскивают в виде ньютонова потенциала простого слоя $U(P) = \iint\limits_{\Gamma} \mu(P_0) \frac{1}{r(P,P_0)} ds$.

Аналогично в плоском случае решение внутренней задачи Дирихле и решение внешней задачи Неймана ищут в виде логарифмических потенциалов двойного слоя $U(P) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(P_0) \frac{\partial}{\partial n}\left(\ln \frac{1}{r(P,P_0)}\right) dl$ и, соответственно, простого слоя $U(P) = \int\limits_{\Gamma} \mu(P_0) \ln \frac{1}{r(P,P_0)} dl$.

В результате такого подхода краевые задачи для уравнения Лапласа сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Мы не можем подробно изложить эту теорию, однако основные результаты сформулируем. С подобным изложением теории

интегральных уравнений можно ознакомиться по учебнику [11] (см. также [2]).

Теорема. Внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана в пространстве разрешимы при любых непрерывных данных $f(P)$, и их решения представляются в виде потенциалов двойного и простого слоя, соответственно. Эти решения единственные.

В случае плоскости для разрешимости внешней задачи Неймана необходимо выполнение дополнительного условия на граничную функцию $f(P)$: $\int_{\Gamma} f(P)dl = 0$. Решение внешней задачи Неймана в плоском случае определено с точностью до произвольной постоянной.

2. **Внешняя задача Дирихле и внутренняя задача Неймана**. В пространственном случае решение внутренней задачи Неймана так же, как и внешней задачи, отыскивают в виде потенциала простого слоя. В этом случае внутренняя задача разрешима при любой непрерывной граничной функции $f(P)$, удовлетворяющей условию разрешимости $\iint_{\Gamma} f(P)ds = 0$. При этом решение задачи определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. С внешней задачей Дирихле дело обстоит чуть сложнее: если искать решение в виде потенциала двойного слоя, то оно существует лишь для граничных функций, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию. Однако если искать решение в виде суммы потенциала двойного слоя и фундаментального решения $\frac{a}{r(P,0)}$, то внешняя задача Дирихле разрешима при любой непрерывной граничной функции $f(P)$.

На плоскости решение внутренней задачи Неймана отыскивают в виде логарифмического потенциала простого слоя, а решение внешней задачи Дирихле – в виде суммы логарифмического потенциала двойного слоя и неизвестной постоянной a. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Внешняя задача Дирихле разрешима при любой непрерывной граничной функции $f(P)$. Внутренняя задача Неймана разрешима при любой непрерывной граничной функции $f(P)$, удовлетворяющей условию разрешимости $\int_{\Gamma} f(P)dl = 0$. При этом

решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до произвольной постоянной.

3. **Краевые задачи для уравнения Пуассона**.

Для уравнения Пуассона $\Delta U = -f(P)$ изучаются аналогичные краевые задачи. Это уравнение имеет частное решение в виде объемного потенциала $U_0(P) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D f(P_0)\frac{1}{r(P,P_0)}dV$ в пространстве или логарифмического потенциала $U_0(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D f(P_0)\ln\frac{1}{r(P,P_0)}ds$ на плоскости. Отсюда следует, что решение краевой задачи для уравнения Пуассона можно свести к решению соответствующей краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta V = 0$, если искомую функцию представить в виде суммы $U = U_0 + V$. Решив задачу для уравнения Лапласа, мы, тем самым, найдем решение исходной задачи.

ГЛАВА III. КОРРЕКТНОСТЬ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§1. Корректная задача

Поскольку задачи математической физики описывают реальные физические процессы, то математическая постановка этих задач должна удовлетворять следующим естественным требованиям:

1) решение должно существовать при любых краевых значениях (начальных и граничных), принадлежащих к некоторому множеству функций M_1;

2) решение должно быть единственным в некотором множестве функций M_2;

3) решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободного члена, коэффициентов уравнения и т.д.). Непрерывная зависимость решения U от какого-либо данного φ означает следующее: пусть последовательность данных $\varphi_k, k = 1,2,...$, в каком-либо смысле стремится к значению φ; пусть U_k и U – соответствующие решения задачи. Тогда последовательность U_k должна стремиться к функции U.

Требование непрерывной зависимости решения обусловливается тем обстоятельством, что данные физической задачи, как правило, определяются из эксперимента, приближенно, и поэтому нужно быть уверенным в том, что решение задачи не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Адамар выдвинул постулат, что все процессы в математической физике, которые разумно описывать дифференциальными уравнениями, удовлетворяют перечисленным выше требованиям. Задача, удовлетворяющая требованиям 1) – 3), называется **корректно поставленной**, а множество функций $M_1 \cap M_2$ – классом корректности данной задачи.

Задача называется некорректной, если она разрешима не при всех начальных данных, либо если она имеет неединственное решение, либо нарушается непрерывная зависимость решения от условий задачи. Первый пример некорректной задачи был построен Адамаром в 1904 году. Он рассмотрел задачу Коши для уравнений Коши-Римана $U_t = V_x, U_x = -V_t$, и построил последовательность решений

$U_n = e^{-\sqrt{n}} \cdot e^{nt} \cos nx$, $V_n = e^{-\sqrt{n}} \cdot e^{nt} \sin nx$, которая при любом $t > 0$ неограничена, если $n \to \infty$. В то же самое время при $t = 0$ эти решения удовлетворяют начальным условиям

$U_n|_{t=0} = e^{-\sqrt{n}} \cos nx, V_n|_{t=0} = e^{-\sqrt{n}} \sin nx$, которые равномерно по x стремятся к нулю при $n \to \infty$. Более того, производные любого порядка от этих функций также стремятся к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, в этой задаче нарушается требование непрерывной зависимости решений от начальных условий. Этот пример можно немного видоизменить и рассмотреть задачу Коши для уравнения Лапласа $U_{tt} + U_{xx} = 0$ с начальными данными $U|_{t=0} = 0, U_t|_{t=0} = \frac{1}{n} \sin nx$. Решение такой задачи имеет вид $U_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} nt \sin nx$, где гиперболический синус $\operatorname{sh} nt = \frac{1}{2}(e^{nt} - e^{-nt})$ (рекомендуем в качестве упражнения самостоятельно получить эти решения методом разделения переменных). Последовательность решений U_n при $t > 0$ неограничена, если $n \to \infty$. В то же время начальные данные $\frac{1}{n} \sin nx$ равномерно стремятся к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно.

Сейчас мы приведем еще один пример некорректной задачи. Рассмотрим уравнение теплопроводности $U_t = U_{xx}$ в области $t < 0$, $0 \le x \le \pi$, и решим краевую задачу $U(0,t) = U(\pi,t) = 0, U(x,0) = \varphi(x)$. Это задача об определении тепловой "истории" нагретого тела по его состоянию в данный момент. Некорректность такой задачи легко устанавливается рассмотрением последовательности решений $U_n = e^{-\sqrt{n}} \cdot e^{-n^2 t} \sin nx$, неограниченной при любом $t < 0$ и удовлетворяющей условиям $U_n(x,0) = e^{-\sqrt{n}} \sin nx$, точно таким же, как в примере Адамара.

Некорректные задачи приходится иногда решать в тех случаях, когда хотят получить описание некоторого процесса не по условиям, которыми он вызывается, а по некоторым его следствиям, полученным в результате эксперимента. Например, если хотят установить распределение температур в теле для $t = -T_0 < 0$, зная тепловое состояние при $t = 0$.

§2. Корректность основных краевых задач математической физики

Начиная с Адамара, в теории уравнений математической физики изучаются, как правило, корректные задачи. Все задачи, рассматриваемые и в первой юните и в данной юните, являются корректными. Наиболее полно вопросы корректности были изучены нами для эллиптических краевых задач. В самом деле, вопросы разрешимости задачи Дирихле и задачи Ньютона были рассмотрены в главе II, §7. Для простых областей были получены аналитические формулы решений задачи Дирихле в главе II, §§ 4,5 (интегральные формулы Пуассона). Единственность решений краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона следует из принципа максимума. Для задачи Дирихле (внутренней и внешней) эти вопросы были подробно обоснованы в той же главе, в §2.

Разрешимость задачи Коши для уравнения теплопроводности и волнового уравнения рассматривалась в главе I, §§ 2,5,6, а краевые задачи для тех же уравнений решались методом Фурье в юните 1, в главе IV, §§2,3. Решения этих задач также единственные и непрерывно зависят от начальных данных.

Исследование корректности более сложных задач математической физики представляет очень важную и трудную задачу теории этих уравнений.

Замечание в конце. При постановке задач и в процессе их решения мы всегда предполагали, что данные этих задач (начальные и граничные значения, коэффициенты уравнений и т.д.) имеют непрерывные производные некоторого порядка (иными словами, имеют определенную гладкость). Об этом было сказано в самом начале и неоднократно подчеркивалось на протяжении всего курса. Однако в примерах, рассматриваемых далее (да и в некоторых предыдущих), условия гладкости часто не соблюдаются. Тем не менее, функции, которые получаются при решении этих примеров, также считаются решениями соответствующих задач. Объяснение этому лежит в третьем условии корректности краевых задач: решения, полученные при помощи сглаживания начальных данных, будут сколь угодно мало отличаться от тех, которые мы получаем для исходных, негладких, данных.

Учитывая это замечание, мы в дальнейшем никогда не будем требовать, чтобы данные задач обязательно удовлетворяли условиям гладкости.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. *Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.*

1. Решите самостоятельно следующие задачи, взяв данные своего варианта из таблицы.

Задача 1. Пусть начальное распределение температуры в бесконечном стержне имеет вид $\varphi(x)$. Коэффициент температуропроводности стержня a. Вычислить температуру стержня в точке $x = x_0$ в момент времени $t = t_0$.

Задача 2. В задаче Коши $U_t = a^2 U_{xx}, U(x,0) = \varphi(x)$ сделать преобразование Фурье и найти решение преобразованной задачи. Записать решение исходной задачи с помощью обратного преобразования Фурье.

Задача 3. По неограниченной струне бежит волна $\varphi(x - at)$. Приняв эту волну за начальное возмущение струны в момент $t = 0$, найти отклонение струны при $t > 0$.

Задача 4. Функция $U(x,0)$ имеет вид, изображенный на рисунке, а начальные скорости равны нулю. Найти отклонение $U(x,t)$ точки x струны в момент времени t, если скорость распространения волны a. Построить форму струны в момент $t = t_0$.

Задача 5. По полуограниченной струне $0 \le x < \infty$ бежит волна $f(x + at)$ при $t < 0$. Найти колебания струны при $0 < t < \infty$ в случае, когда конец струны закреплен.

Задача 6. Решить методом характеристик систему уравнений $\overline{U}_t + A\overline{U}_x = 0$, где $\overline{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$, A – матрица коэффициентов, приняв за начальные условия $U_1(x,0) = \varphi(x)$, $U_2(x,0) = \psi(x)$.

Задача 7. Найти решение уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, принимающее при $y = 0$ граничные значения $U(x,0) = \varphi_1$, если $x < 0$, и $U(x,0) = \varphi_2$, если $x > 0$.

Задача 8. Вычислить в точке $x = x_0, y = y_0$ логарифмический потенциал простого слоя отрезка $[-a,a]$ с постоянной плотностью $\mu(x) = \mu_0$.

Таблица данных

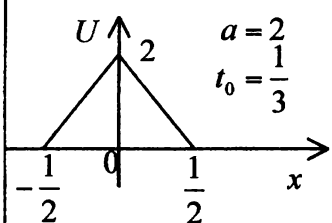
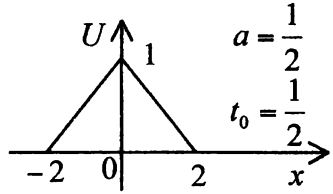
№ варианта / № задачи	1	2
1	$\varphi(x)=\begin{cases}50, \text{если } x\in[0,2]\\ 0, \text{если } x\notin[0,2]\end{cases}$ $a=\frac{1}{2}, x_0=20, t_0=180$	$\varphi(x)=\begin{cases}-100, \text{если } x\in[-1,2]\\ 0, \text{если } x\notin[-1,2]\end{cases}$ $a=2, x_0=4, t_0=240$
2	$\varphi(x)=e^{-x^2}$	$\varphi(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
3	$\varphi(x-at)=\cos(x-at)$	$\varphi(x-at)=e^{-\lvert x-at\rvert}$
4		
5	$f(x+at)=(x+at)e^{-(x+at)}$	$f(x+at)=(x+at)\cos(x+at)$
6	$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{pmatrix}$ $\varphi(x)=\sin x, \psi(x)=e^{-\lvert x\rvert}$	$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 4{,}5\end{pmatrix}$ $\varphi(x)=\frac{1}{x^2+1}, \psi(x)=\ln(1+\lvert x\rvert)$
7	$\varphi_1=1, \varphi_2=-2$	$\varphi_1=-4, \varphi_2=3$
8	$x_0=0, y_0=1$ $a=2, \mu_0=3$	$x_0=0, y_0=4$ $a=3, \mu_0=5$

Таблица данных (продолжение)

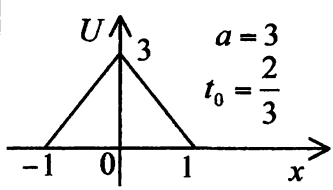
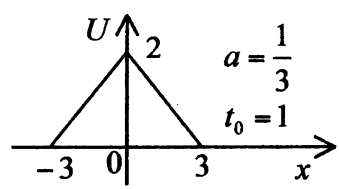
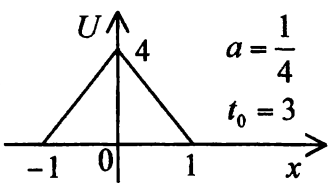
№ варианта / № задачи	3	4
1	$\varphi(x)=\begin{cases}-50, \text{если } x\in[-1,0]\\ 0, \text{если } x\notin[-1,0]\end{cases}$ $a=3, x_0=14, t_0=60$	$\varphi(x)=\begin{cases}-200, \text{если } x\in[0,3]\\ 0, \text{если } x\notin[0,3]\end{cases}$ $a=\frac{1}{3}, x_0=10, t_0=200$
2	$\varphi(x)=\frac{1}{x^2+1}$	$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-x}, \text{если } x\geq 0\\ -e^{-x}, \text{если } x<0\end{cases}$
3	$\varphi(x-at)=arctg(x-at)$	$\varphi(x)=\sin(x-at)$
4		
5	$f(x+at)=\sin(x+at)$	$f(x+at)=\ln(1+x+at)$
6	$A=\begin{pmatrix}-1,5 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ $\varphi(x)=\cos x, \psi(x)=\frac{1}{x^2+1}$	$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ $\varphi(x)=e^{-\lvert x\rvert}, \psi(x)=\frac{x}{x^2+1}$
7	$\varphi_1=5, \varphi_2=1$	$\varphi_1=2, \varphi_2=-3$
8	$x_0=0, y=2$ $a=5, \mu_0=2$	$x_0=0, y=6$ $a=4, \mu_0=4$

Таблица данных (продолжение)

№ варианта / № задачи	5	
1	$\varphi(x) = \begin{cases} 400, \text{если } x \in [-2,1] \\ 0, \text{если } x \notin [-2,1] \end{cases}$ $a = 2, x_0 = 30, t_0 = 60$	
2	$\varphi(x) = e^{-\lvert x \rvert}$	
3	$\varphi(x) = \ln(1 + \lvert x - at \rvert)$	
4		
5	$f(x + at) = arctg(x + at)$	
6	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$ $\varphi(x) = arctg\frac{1}{x}, \psi(x) = \ln(1 + \lvert x \rvert)$	
7	$\varphi_1 = 4, \varphi_2 = -1$	
8	$x_0 = 0, y_0 = 5$ $a = 1, \mu_0 = 10$	

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 1

Задание

Решить методом Фурье задачу Коши для уравнения теплопроводности с начальным условием $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Методом Фурье провести разделение переменных в уравнении теплопроводности.	$U_t = U_{xx}$, $U(x,t) = X(x)\cdot T(t)$, $U_t = X\cdot T'$, $U_x = X'\cdot T$, $U_{xx} = X''\cdot T \Rightarrow XT' = X''\cdot T$. Разделим переменные: $\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$, или а) $T' + \lambda T = 0$, б) $X'' + \lambda X = 0$.
2	Решить первое уравнение с переменной t, отбросив при этом те решения, которые неограниченно возрастают при $t \to \infty$.	$T' + \lambda T = 0$, $\dfrac{dT}{T} + \lambda dt = 0 \Rightarrow \ln\lvert T\rvert = -\lambda t + C$ $\Rightarrow T = C_1 e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, C_1 – произвольная постоянная.
3	Решить второе уравнение с переменной x.	$X'' + \lambda X = 0$, $r^2 + \lambda = 0$, $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$, $X_1 = \cos\sqrt{\lambda}x, X_2 = \sin\sqrt{\lambda}x \Rightarrow$ $\Rightarrow X = C_2\cos\sqrt{\lambda}x + C_3\sin\sqrt{\lambda}x$ C_2 и C_3 – произвольные постоянные.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
4	Составить общее решение уравнения с частными производными в виде несобственного интеграла по параметру λ.	$U_\lambda = X(x)\cdot T(t) = (A(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x + B(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x)\cdot e^{-\lambda t}$. $U(x,t) = \int_0^\infty U_\lambda(x,t)d\lambda = \int_0^\infty A(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x e^{-\lambda t}d\lambda + \int_0^\infty B(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x e^{-\lambda t}d\lambda$.
5	Подставив в общее решение начальное условие, найти неизвестные функции.	$U(x,0) = \int_0^\infty A(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x d\lambda + \int_0^\infty B(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x dx = \varphi(x)$. $A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\sqrt{\lambda}\xi d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\sqrt{\lambda}\xi}{\xi^2+1}d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\sqrt{\lambda}\xi}{\xi^2+1}d\xi = e^{-\sqrt{\lambda}}$. (При вычислении интегралов воспользоваться таблицей 2 или 3 из файла материалов). $B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\sqrt{\lambda}\xi d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\sqrt{\lambda}\xi}{\xi^2+1}d\xi = 0$. (Использовали нечетность подинтегральной функции).
6	Выписать решение задачи Коши, подставив найденные функции.	$U(x,t) = \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}x e^{-\lambda t}d\lambda = \int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}x\cdot e^{-\sqrt{\lambda}(1-\sqrt{\lambda}t)}d\lambda$.

Решите самостоятельно следующие задачи:

1.1. Решить методом Фурье задачу Коши для уравнения теплопроводности с начальным условием $\varphi(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

1.2. Решить методом Фурье задачу Коши для уравнения теплопроводности с начальным условием $\varphi(x)=e^{-|x|}$.

1.3. Решить методом Фурье задачу Коши для уравнения теплопроводности с начальным условием $\varphi(x)=arctg\dfrac{1}{x}$.

1.4. Решить методом Фурье задачу Коши для уравнения теплопроводности с начальным условием $\varphi(x)=e^{-x^2}$.

1.5. Решить методом Фурье задачу Коши для уравнения теплопроводности с начальным условием $\varphi(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\geq 0\\ -e^{-x}, x<0\end{cases}$.

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 2

Задание

Решить методом Даламбера задачу Коши для волнового уравнения с начальными условиями $\varphi(x)=0, \psi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Выписать общее решение волнового уравнения.	$U(x,t)=C_1(x-at)+C_2(x+at)$.
2	Полагая $t=0$, подставить в общее решение первое начальное условие.	$U(x,0)=C_1(x)+C_2(x)=0$.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
3	Записать производную общего решения по t и подставить второе начальное условие.	$U_t = C_1'(x-at)(-a) + C_2'(x+at)\cdot a$ $U_t(x,0) = -aC_1'(x) + aC_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$
4	Проинтегрировать полученное равенство.	$-aC_1(x) + aC_1(0) + aC_2(x) - aC_2(0) =$ $= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left\lvert t+\sqrt{t^2+1}\right\rvert\Big\rvert_0^x = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert.$
5	Записать систему уравнений для неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и решить ее.	$\begin{cases} C_1(x)+C_2(x)=0 \\ -C_1(x)+C_2(x)=\frac{1}{a}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert - C_1(0)+C_2(0) \end{cases} \Rightarrow$ $C_1(x) = -\frac{1}{2a}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert + \frac{1}{2}C_1(0) - \frac{1}{2}C_2(0)$ $C_2(x) = +\frac{1}{2a}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert - \frac{1}{2}C_1(0) + \frac{1}{2}C_2(0).$
6	Заменить в полученных формулах x на $(x-at)$ и на $(x+at)$ соответственно и, подставив выражения в общее решение, получить формулу Даламбера.	$C_1(x-at) = -\frac{1}{2a}\ln\left\lvert x-at+\sqrt{(x-at)^2+1}\right\rvert +$ $+\frac{1}{2}C_1(0) - \frac{1}{2}C_2(0)$ $C_2(x+at) = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert x+at+\sqrt{(x+at)^2+1}\right\rvert -$ $-\frac{1}{2}C_1(0) + \frac{1}{2}C_2(0)$ $U(x,t) = -\frac{1}{2a}\ln\left\lvert x-at+\sqrt{(x-at)^2+1}\right\rvert +$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
		$+\frac{1}{2a}\ln\left\|x+at+\sqrt{(x+at)^2+1}\right\|=$ $=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+at+\sqrt{(x+at)^2+1}}{x-at+\sqrt{(x-at)^2+1}}\right\|.$

Решите самостоятельно следующие задачи:

2.1. Решить методом Даламбера задачу Коши для волнового уравнения с начальными условиями $\varphi(x)=e^{-x^2},\psi(x)=0$.

2.2. Решить методом Даламбера задачу Коши для волнового уравнения с начальными условиями $\varphi(x)=0,\psi(x)=xe^{-x^2}$.

2.3. Решить методом Даламбера задачу Коши для волнового уравнения с начальными условиями $\varphi(x)=0,\psi(x)=e^{-|x|}$.

2.4. Решить методом Даламбера задачу Коши для волнового уравнения с начальными условиями $\varphi(x)=xe^{-x^2},\psi(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

2.5.Решить методом Даламбера задачу Коши для волнового уравнения с начальными условиями $\varphi(x)=e^{-|x|},\psi(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 3

Задание

Решить методом характеристик задачу Коши для уравнения первого порядка $2U_x-3U_t+U=0,U(x,0)=\ln(x^2+1)$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Составить уравнения характеристик.	$\frac{dx}{ds}=2, \frac{dt}{ds}=-3$
2	Решить уравнения характеристик.	$dx=2ds \Rightarrow x=2s+C_1$ $dt=-3ds \Rightarrow t=-3s+C_2$
3	Определить постоянные интегрирования из начальных условий и записать формулы преобразования переменных.	$\begin{cases} x(0)=\tau \\ t(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\tau \\ C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2s+\tau \\ t=-3s \end{cases}$
4	Свести задачу Коши для уравнения с частными производными к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с помощью характеристической замены переменных.	$U_\tau(s) \equiv U(x(s,\tau),t(s,\tau)),$ $\frac{dU_\tau}{ds} \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial U}{\partial t}\frac{dt}{ds}=2U_x-3U_t \Rightarrow$ $\frac{dU_\tau}{ds}+U_\tau=0, U_\tau(0)=\ln(\tau^2+1).$
5	Решить полученную задачу.	$\frac{dU_\tau}{U_\tau}+ds=0 \Rightarrow \ln\lvert U_\tau\rvert+s=C \Rightarrow U_\tau=C_1e^{-s}.$ Определим C_1 из начального условия: $U(0)=C_1=\ln(\tau^2+1)$. Получим решение задачи $U_\tau=\ln(\tau^2+1)e^{-s}.$
6	Сделать обратное преобразование.	$\begin{cases} x=2s+\tau \\ t=-3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau=x+\frac{2}{3}t \\ s=-\frac{t}{3} \end{cases}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
		Сделаем замену переменных в полученном решении: $U = \ln\left((x+\frac{2}{3}t)^2+1\right)e^{t/3}$.

Решите самостоятельно следующие задачи:

3.1. Решить методом характеристик задачу Коши для уравнения первого порядка $U_x + 4U_t - 3U = 0, U(x,0) = \frac{1}{x^2+1}$.

3.2. Решить методом характеристик задачу Коши для уравнения первого порядка $3U_x - U_t + 2U = 0, U(x,0) = arctgx$.

3.3. Решить методом характеристик задачу Коши для уравнения первого порядка $2U_x + U_t - 4U = 0, U(x,0) = 2\sin\frac{x}{3}$.

3.4. Решить методом характеристик задачу Коши для уравнения первого порядка $U_x + 5U_t + 2U = 0, U(x,0) = \cos(x+1)$.

3.5. Решить методом характеристик задачу Коши для уравнения первого порядка $4U_x - U_t + 3U = 0, U(x,0) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 4

Задание

Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = \sin\varphi$. Вычислить приближенно значение решения в точке $r = 1, \varphi = \frac{3\pi}{17}$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Записать уравнение Лапласа в полярных координатах (r,φ).	$\Delta U = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} = 0.$
2	Методом Фурье провести разделение переменных в уравнении Лапласа.	$U = U(r)\Phi(\varphi), U_r = U'\cdot\Phi, U_{rr} = U''\Phi,$ $U_\varphi = U\cdot\Phi', U_{\varphi\varphi} = U\cdot\Phi'' \Rightarrow$ $(U'' + \frac{1}{r}U')\Phi + \frac{1}{r^2}U\cdot\Phi'' = 0.$ Разделим переменные $(U'' + \frac{1}{r}U')\frac{r^2}{U} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$ или а) $r^2U'' + rU' - \lambda U = 0$, б) $\Phi'' + \lambda\Phi = 0.$
3	Решить дифференциальное уравнение по φ и, учитывая периодичность решений, получить целочисленные значения параметра.	$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, K^2 + \lambda = 0, K_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i,$ $\Phi_1 = C_1\cos\sqrt{\lambda}\varphi, \Phi_2 = C_2\sin\sqrt{\lambda}\varphi \Rightarrow$ $\Phi = C_1\cos\sqrt{\lambda}\varphi + C_2\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$ Из периодичности решений следует: $\sqrt{\lambda} = n, n = 1,2,...$
4	Подставив полученные значения параметра в уравнение по r, решить это уравнение, при этом отбросить те решения, которые неограниченно возрастают при $r \to 0$.	$r^2U'' + rU' - n^2U = 0$ – уравнение Эйлера имеет фундаментальную систему решений $U_1 = r^n$, $U_2 = r^{-n}$ при $n > 0$ и $U_1 = r^0, U_2 = \ln r$ при $n = 0$. Общее решение имеет вид $U_n = C_1r^n + C_2r^{-n}$ или $U_0 = C_1 + C_2\ln r.$ Так как при $r \to 0$ решение должно быть ограниченным, $U_n = C_1r^n, n = 0,1,2,...$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
5	Составить общее решение уравнения Лапласа в виде фундаментального ряда.	$U(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n\cdot\Phi_n=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi).$
6	Подставив в общее решение граничное условие, найти коэффициенты ряда.	$U(1,\varphi)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi=\sin\varphi,$ $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{1}{2\pi}(-\cos\varphi)\Big\|_0^{2\pi}=0,$ $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos n\varphi d\varphi=0$ (в силу ортогональности функций $\sin\varphi$ и $\cos n\varphi$ на отрезке $[0,2\pi]$ $b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi=1$ (в силу того, что $\|\sin\varphi\|=\pi$) $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cdot\sin n\varphi d\varphi=0$ при $n>1$ (в силу ортогональности функций $\sin\varphi$ и $\sin n\varphi$, $n>1$)
7	Выписать решение краевой задачи, подставив найденные коэффициенты.	$U(r,\varphi)=r\cdot\sin\varphi.$
8	Вычислить приближенно значение решения, взяв несколько членов ряда и подставив значения переменных.	$U(\frac{1}{2},\frac{3\pi}{17})=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{3\pi}{17}\cong 0{,}493$

Решите самостоятельно следующие задачи:

4.1. Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 2 + \sin 2\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{\pi}{11}$.

4.2. Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 100 - \cos 3\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{1}{4}, \varphi = \frac{7}{13}\pi$.

4.3. Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 10\sin\varphi - 2\cos 3\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{1}{2}, \varphi = \frac{13}{7}\pi$.

4.4. Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 1 + 3\sin 2\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{3}{5}, \varphi = \frac{11}{3}\pi$.

4.5. Решить методом Фурье задачу Дирихле для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным значением $f(\varphi) = 50 + 3\cos\varphi$. Вычислить приближенно значение решения при $r = \frac{3}{4}, \varphi = \frac{\pi}{5}$.

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 5

Задание

Решить с помощью интегральной формулы Пуассона задачу Дирихле в полуплоскости $y > 0$, если граничное значение при $y = 0$ равно

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{если } |x| \le 1 \\ 0, \text{если } |x| > 1 \end{cases}.$$

Вычислить приближенно значение решения при $x = 10, y = 9$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	Выписать формулу Пуассона для полуплоскости и подставить граничное значение.	$U(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}$, $U(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}$.
2	Провести интегрирование.	$U(x,y)=\frac{y}{\pi}\cdot\frac{1}{y}arctg\frac{\xi-x}{y}\Big\|_{-1}^{1}=$ $=\frac{1}{\pi}\left(\text{arctg}\,\frac{1-x}{y}+\text{arctg}\,\frac{x+1}{y}\right)$.
3	Вычислить приближенно значение решения, подставив значения переменных.	$U(10,9)=\frac{1}{\pi}\left(arctg(-1)+arctg\frac{11}{9}\right)=$ $=\frac{1}{\pi}arctg\frac{11}{9}-\frac{1}{4}\cong 0{,}0317$

Решите самостоятельно следующие задачи:

5.1. Решить с помощью интегральной формулы Пуассона задачу Дирихле в полуплоскости $y>0$, если граничное значение при $y=0$ равно $f(x)=\begin{cases}2x, \text{если } x\in[0,2]\\ 0, \text{если } x\notin[0,2]\end{cases}$. Вычислить приближенно значение решения при $x=-10, y=1$.

5.2. Решить с помощью интегральной формулы Пуассона задачу Дирихле в полуплоскости $y>0$, если граничное значение при $y=0$

равно $f(x)=\begin{cases}-3, \text{если } x\in[-3,0]\\ 0, \text{если } x\notin[-3,0]\end{cases}$. Вычислить приближенно значение решения при $x=5, y=10$.

5.3. Решить с помощью интегральной формулы Пуассона задачу Дирихле в полуплоскости $y>0$, если граничное значение при $y=0$ равно $f(x)=\begin{cases}x+1, \text{если } x\in[-1,0]\\ 0, \text{если } x\notin[-1,0]\end{cases}$. Вычислить приближенно значение решения при $x=-7, y=9$.

5.4. Решить с помощью интегральной формулы Пуассона задачу Дирихле в полуплоскости $y>0$, если граничное значение при $y=0$ равно $f(x)=\begin{cases}100, \text{если } x\in[1,2]\\ 0, \text{если } x\notin[1,2]\end{cases}$. Вычислить приближенно значение решения при $x=11, y=13$.

5.5. Решить с помощью интегральной формулы Пуассона задачу Дирихле в полуплоскости $y>0$, если граничное значение при $y=0$ равно $f(x)=\begin{cases}3-x, \text{если } x\in[0,2]\\ 0, \text{если } x\notin[0,2]\end{cases}$. Вычислить приближенно значение решения при $x=6, y=11$.

Примеры отработки решения задач

Пример 1. Пусть начальное распределение температуры в бесконечном стержне имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases}U_0, \text{если } x\in[-1,1]\\ 0, \text{если } x\notin[-1,1]\end{cases}$$

Найти распределение температуры в стержне.

Решение. Воспользуемся интегральной формулой Пуассона для уравнения теплопроводности

$$U(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

После подстановки начальной функции будем иметь

$$U(x,t)=\frac{U_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Эта функция выражается через специальную функцию, называемую функцией Лапласа:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{\mu^2}{2}}d\mu,$$

значения которой сведены в таблицу 4 (см. стр. 124).

Действительно, полагая в нашем решении $\frac{x-\xi}{a\sqrt{2t}}=\mu$, $d\xi=-a\sqrt{2t}d\mu$, найдем, что

$$U(x,t)=-\frac{U_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x+1}{a\sqrt{2t}}}^{\frac{x-1}{a\sqrt{2t}}}e^{\frac{-\mu}{2}}d\mu=U_0\left[\Phi\left(\frac{x+1}{a\sqrt{2t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-1}{a\sqrt{2t}}\right)\right].$$

По таблице 4, к примеру, положив $a=1, U_0=100°, x=10$ м,

$t = 2$ мин=120 сек, получим

$$U(10,120) = 100°[\Phi(0,7100) - \Phi(0,5809)] \cong 4,21°.$$

Пример 2. Начальные отклонения точек струны имеют вид, изображенный на рис. 39, а начальные скорости равны нулю. Найти отклонение точки x струны в момент времени t.

Решение. Воспользуемся формулой Даламбера (117):

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi.$$

После подстановки начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, получим решение данной задачи. Но для этого надо знать аналитическое выражение $\varphi(x)$. Так как график этой функции представляет собой отрезки прямых, их уравнения будут иметь вид $u = kx + b$. Найдем коэффициенты k и b для $x \in [-1,0]$: $u(0) = 1, u(-1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 = b, 0 = -k + b \Rightarrow k = 1, b = 1 \Rightarrow u = x + 1$. На отрезке $[0,1]$ коэффициенты равны: $u(0) = 1, u(1) = 0 \Rightarrow 1 = b, 0 = k + b \Rightarrow$ $\Rightarrow k = -1, b = 1 \Rightarrow u = -x + 1$. Таким образом

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < -1 \\ x + 1, \text{ если } -1 \le x < 0 \\ -x + 1, \text{ если } 0 \le x < 1 \\ 0, \text{ если } x \ge 1 \end{cases}$$

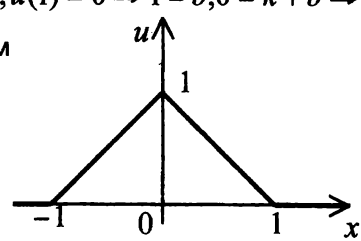


Рис. 39.

Функция $\psi(x) = 0$ при всех x.

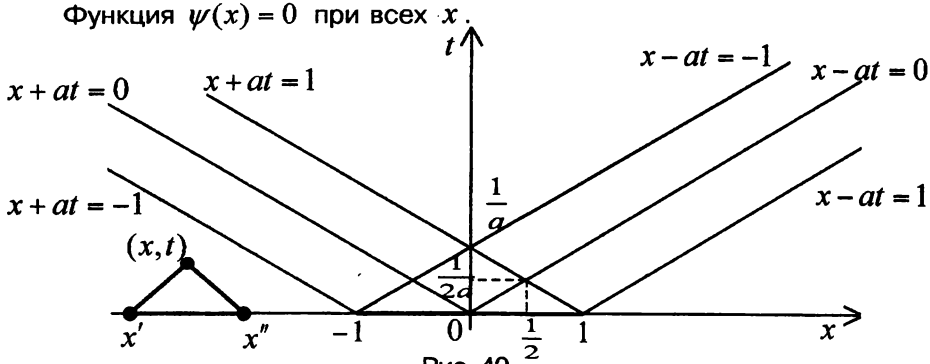


Рис. 40.

Как мы уже видели при решении примера на стр. 40 выражения для отклонения $U(x,t)$ удобнее всего писать, рассматривая движение точки (x,t) в фазовой плоскости. При этом значение $U(x,t)$ будет равно среднему арифметическому значений начальной функции в вершинах основания характеристического треугольника. Здесь задача осложняется только тем, что при переходе аргументов $x+at$ и $x-at$ через нуль функции $\varphi(x+at)$ и $\varphi(x-at)$ меняют свое выражение. Поэтому на фазовой плоскости проведены дополнительно две прямые $x+at=0$ и $x-at=0$, в точках которых и происходит указанное изменение. Далее, в силу четности $\varphi(x)$ можно рассматривать только положительные значения x. Из рисунка 40 видно, что точки струны, лежащие в интервалах $(0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1),(1,\infty)$ в разные моменты времени по-разному переходят из зоны в зону. Разберем случай, когда $x\in(0,\frac{1}{2})$.

Если $0<t<\frac{x}{a}$, то обе вершины x' и x'' характеристического треугольника лежат в интервале (0,1). Координаты этих вершин определяются из уравнений: $x'=x-at$ и $x''=x+at$. Поэтому значение $U(x,t)=\frac{-(x-at)-(x+at)+2}{2}=1-x$. Если $\frac{x}{a}<t<\frac{1-x}{a}$, то вершина x' лежит в интервале (−1,0), а вершина x'' – в интервале (0,1). Поэтому $U(x,t)=\frac{(x-at)-(x+at)+2}{2}=1-at$. Если $\frac{1-x}{a}<t<\frac{1+x}{a}$, то вершина x' лежит в интервале (−1,0), а вершина x'' в интервале $(1,\infty)$. В этом случае значение $U(x,t)=\frac{(x-at)+1}{2}=\frac{1}{2}(x-at+1)$. Наконец, при $t>\frac{1+x}{a}$ вершины $x'\in(-\infty,-1)$ и $x''\in(1,\infty)$, поэтому $U(x,t)=0$. Таким

образом, при $x\in(0,\frac{1}{2})$ функция

$$U(x,t)=\begin{cases}1-x, \text{если } 0<t<\dfrac{x}{a},\\ 1-at, \text{если } \dfrac{x}{a}<t<\dfrac{1-x}{a},\\ \dfrac{1}{2}(x-at+1), \text{если } \dfrac{1-x}{a}<t<\dfrac{1+x}{a},\\ 0, \text{если } t>\dfrac{1+x}{a}.\end{cases}$$

Аналогично рассматриваются случаи $x\in(\frac{1}{2},1)$ и $x\in(1,\infty)$ (в качестве упражнения рекомендуем их рассмотреть самостоятельно).

Для $x\in(\frac{1}{2},1)$ функция

$$U(x,t)=\begin{cases}1-x, \text{если } 0<t<\dfrac{1-x}{a},\\ \dfrac{1}{2}(1-x+at), \text{если } \dfrac{1-x}{a}<t<\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{1}{2}(1+x-at), \text{если } \dfrac{x}{a}<t<\dfrac{1+x}{a},\\ 0, \text{если } t>\dfrac{1+x}{a}.\end{cases}$$

Для $x\in(1,\infty)$ функция

$$U(x,t)=\begin{cases}0, \text{если } 0<t<\dfrac{x-1}{a},\\ \dfrac{1}{2}(1-x+at), \text{если } \dfrac{x-1}{a}<t<\dfrac{x}{a},\\ \dfrac{1}{2}(1+x-at), \text{если } \dfrac{x}{a}<t<\dfrac{1+x}{a},\\ 0, \text{если } t>\dfrac{1+x}{a}.\end{cases}$$

Если мы хотим получить форму струны в фиксированный момент времени, то должны выписать значения функции $U(x,t)$ для трех интервалов времени: $(0,\frac{1}{2a}),(\frac{1}{2a},\frac{1}{a}),(\frac{1}{a},\infty)$. Причем можно опять ограничиться случаем $x\geq 0$, так как при $x<0$ в силу четности функции $\varphi(x)$ график будет симметричен относительно оси ординат. Например, форма струны в некоторый фиксированный момент времени $t_0\in(\frac{1}{2a},\frac{1}{a})$ изображена на рисунке 41. В этом интервале функция

$$U(x,t_0)=\begin{cases}1-at_0, \text{если } 0\leq x<1-at_0,\\ \dfrac{1}{2}(1+x-at_0), \text{если } 1-at_0\leq x<at_0,\\ \dfrac{1}{2}(1-x+at_0), \text{если } at_0\leq x<1+at_0,\\ 0, \text{если } x\geq 1+at_0.\end{cases}$$

(Рекомендуем это проверить самостоятельно).

Пример 3. Решите задачу Коши для уравнения первого порядка с переменными коэффициентами

$$xU_x+tU_t+2U=0,-\infty<x<\infty,1<t<\infty,$$

$$U(x,1)=\sin x,-\infty<x<\infty.$$

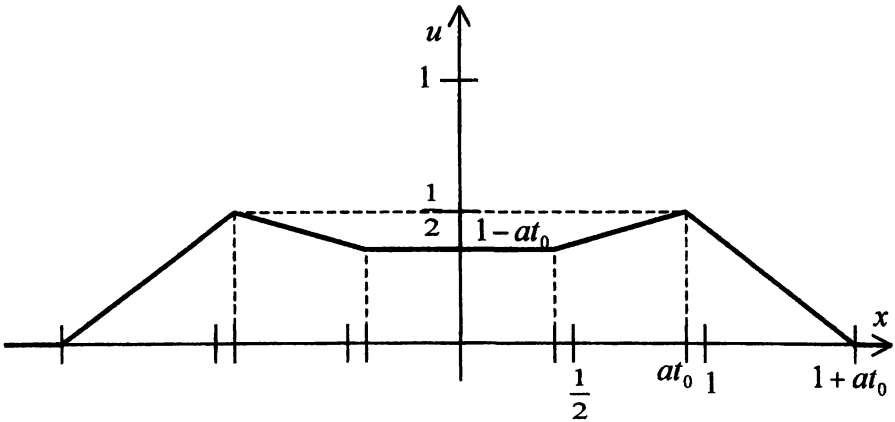


Рис. 41.

Как выглядят характеристики этой задачи? Построить графики решения для различных моментов времени.

Решение. При решении будем придерживаться того алгоритма, которым были решены примеры в главе I, §9. Отметим, что процесс начинается при $t = 1$.

ШАГ 1. Составим уравнения характеристик

$$\frac{dx}{ds} = x, \frac{dt}{ds} = t$$

и решим их: $\frac{dx}{x} = ds \Rightarrow \ln|x| = s + C' \Rightarrow x = C_1 e^s$,

$$\frac{dt}{t} = ds \Rightarrow \ln|t| = s + C'' \Rightarrow t = C_2 e^s.$$

ШАГ 2. Найдем постоянные интегрирования из начальных условий $t(0) = 1, x(0) = \tau, -\infty < \tau < \infty$, и получим формулы перехода от переменных (x,t) к характеристическим переменным (s,τ):

$$x(0) = C_1 = \tau \Rightarrow x = \tau e^s, t(0) = C_2 = 1 \Rightarrow t = e^s.$$

Характеристики этой задачи изображены на рисунке 42.

ШАГ 3. Решим задачу Коши для преобразованного уравнения

$$\frac{dU}{ds} + 2U = 0, U(0) = \sin\tau.$$

$$\frac{dU}{U} + 2ds = 0 \Rightarrow \ln|U| = -2s + C \Rightarrow U = C_1 e^{-2s}.$$

Определим значение C_1 из начального условия:

$U(0) = C_1 = \sin\tau \Rightarrow C_1 = \sin\tau$. Получим решение задачи

$U = \sin\tau e^{-2s}$.

ШАГ 4. Выразим переменные s и τ из формул преобразования переменных: $s = \ln t, \tau = \frac{x}{t}$, и подставим их в решение $U = \sin\tau e^{-2s}$:

$$U(x,t) \equiv U(s(x,t), \tau(x,t)) = \sin\frac{x}{t} e^{-2\ln t} = \frac{1}{t^2}\sin\frac{x}{t}.$$

Графики решения для моментов времени $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$ изображены на рисунке 43.

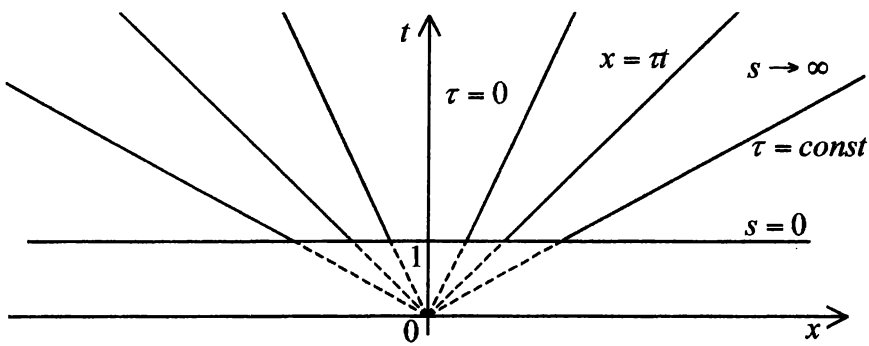


Рис. 42.

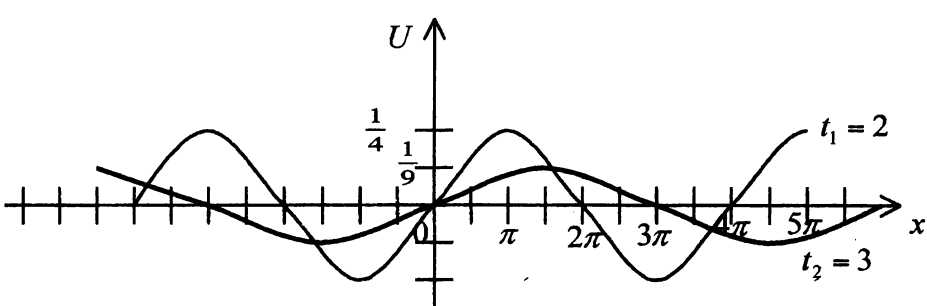


Рис. 43.

Пример 4. Рассматривается система уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial t} + \rho a^2 \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения называются уравнениями акустики.

Они описывают распространение плоских звуковых волн в покоящейся среде. Здесь U – скорость возмущенной среды, а P – давление в этой среде. Постоянные ρ и a связаны со свойствами покоящейся среды: ρ – ее плотность, a – постоянная, характеризующая сжимаемость. Запишем эту систему в матричном виде:

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} U \\ P \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ \rho a^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{U}_t + A\overline{U}_x = 0.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & \dfrac{1}{\rho} \\ \rho a^2 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & \dfrac{1}{\rho} \\ \rho a^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = a, \lambda_2 = -a.$$

Найдем собственный вектор для значения $\lambda_1 = a$:

$$(A - \lambda_1 E)\overline{q} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -aq_1 + \dfrac{1}{\rho}q_2 = 0 \\ \rho a^2 q_1 - aq_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{\rho a}q_2 \\ q_2 - \text{любое действительное число} \end{cases}$$

Возьмем $q_2 = \rho a$, тогда $q_1 = 1$. Следовательно, первый собственный вектор имеет вид $\overline{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho a \end{pmatrix}$. Для значения $\lambda_2 = -a$ собственный вектор находится аналогично:

$$(A-\lambda_2 E)\bar{q}=0 \Rightarrow \begin{cases} aq_1+\dfrac{1}{\rho}q_2=0 \\ \rho a^2 q_1+aq_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1=-\dfrac{1}{\rho a}q_2 \\ q_2- \end{cases}$$ любое действительное число

Пусть $q_2=\rho a$, тогда $q_1=-1$. Значит $\bar{q}_2=\begin{pmatrix}-1\\ \rho a\end{pmatrix}$. Составим матрицу из собственных векторов: $Q=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \rho a & \rho a\end{pmatrix}$. Как следует из теории, изложенной в главе I, §10, после преобразования $\bar{U}=Q\bar{V}$ получится система уравнений с диагональной матрицей коэффициентов, равных собственным значениям исходной матрицы, то есть

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+a\frac{\partial V_1}{\partial x}=0, \frac{\partial V_2}{\partial t}-a\frac{\partial V_2}{\partial x}=0.$$

Общее решение этой системы (которая распалась на два независимых уравнения) имеет вид (см. формулу (132)):

$$V_1=C_1(x-at),\ V_2=C_2(x+at),$$

где C_1 и C_2 – произвольные функции. Если эти функции подставить в формулу $\bar{U}=Q\bar{V}$, то получим общее решение исходной системы:

$$\bar{U}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \rho a & \rho a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1(x-at)\\ C_2(x+at)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1(x-at)-C_2(x+at)\\ \rho aC_1(x-at)-\rho aC_2(x+at)\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$U(x,t)=C_1(x-at)-C_2(x+at),\ P=\rho a\big(C_1(x-at)+C_2(x+at)\big).$$

Эти формулы задают общее решение уравнений акустики. Если нам известны распределения скорости U и давления P в начальный момент $t=0$, то можно подобрать функции C_1 и C_2 так, чтобы решение, даваемое полученными формулами, удовлетворяло начальным данным.

Пример 5. Решить задачу Дирихле для полуплоскости $y > 0$, если при $y = 0$ задано граничное условие $f(x) = \begin{cases} ax + b, \text{если } x \in [0,1] \\ 0, \text{если } x \notin [0,1] \end{cases}$.

Решение. Воспользуемся интегральной формулой Пуассона (164) и подставим в нее граничное значение:

$$U(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_0^1 \frac{(ax+b)dx}{(x-x_0)^2 + y_0^2}.$$

После замены $x - x_0 = \xi$ будем иметь

$$U(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-x_0}^{1-x_0} \frac{(a(\xi + x_0) + b)d\xi}{\xi^2 + y_0^2} = \frac{ay_0}{\pi} \int_{-x_0}^{1-x_0} \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + y_0^2} +$$

$$+ \frac{(ax_0 + b)y_0}{\pi} \int_{-x_0}^{1-x_0} \frac{d\xi}{\xi^2 + y_0^2} = \frac{ay_0}{2\pi} \ln(\xi^2 + y_0^2) \Big|_{-x_0}^{1-x_0} + \frac{(ax_0 + b)}{\pi} arctg \frac{\xi}{y_0} \Big|_{-x_0}^{1-x_0} =$$

$$= \frac{ay_0}{2\pi} \ln \frac{(1-x_0)^2 + y_0^2}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{(ax_0 + b)}{\pi} \left(arctg \frac{1-x_0}{y_0} + arctg \frac{x_0}{y_0} \right).$$

Экспоненциальное преобразование Фурье

$f(x) = \mathcal{F}^{-}[F] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{ixs} ds$		$F(s) = \mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx$
№	$f(x)$	$F(s)$
1.	$f'(x)$	$isF(s)$
2.	$f''(x)$	$-s^2 F(s)$
3.	$f^{(n)}(x)$	$(is)^n F(s)$
4	$f(ax), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
5.	$f(x-a)$	$e^{-ias} F(s)$
6.	$e^{-a^2 x^2}$	$\frac{1}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4a^2}}$
7.	$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q}{a^2 + s^2}$
8.	$\begin{cases} 1, \text{если } \lvert x\rvert < a \\ 0, \text{если } \lvert x\rvert > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin as}{s}$
9.	$\begin{cases} 1, \text{если } \lvert x\rvert < 1 \\ 0, \text{если } \lvert x\rvert > 1 \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin s}{s}$
10.	$f(x) * g(x)$	$F(s) \cdot G(s)$
11.	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\lvert s\rvert}$
12.	$xe^{-a\lvert x\rvert}, a > 0$	$-2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{ias}{(s^2 + a^2)^2}$
13.	$\frac{a}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\lvert s\rvert}$

Таблица 1 (продолжение)

14.	$\begin{cases} e^{-x}, \text{если } x \geq 0 \\ -e^{-x}, \text{если } x < 0 \end{cases}$	$-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s}{1+s^2}$
15.	$\frac{2ax}{(x^2+a^2)^2}$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}se^{-a\lvert s\rvert}$

Таблица 2

Синус–преобразование Фурьє

$f(x)=\int_0^\infty F(s)\sin(xs)ds$		$F(s)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(xs)dx$
$0<x<\infty$		$0<s<\infty$
№	$f(x)$	$F(s)$
1.	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
2.	e^{-ax}	$\frac{2s}{\pi(a^2+s^2)}$
3.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi s}}$
4	$\frac{1}{x}$	1
5.	$\frac{x}{x^2+a^2}$	$e^{-\lvert a\rvert s}$
6.	$\frac{x}{x^4+4}$	$\frac{1}{2}e^{-s}\sin s$
7.	$arctg\frac{a}{x}$	$\frac{1-e^{-as}}{s}$
8.	$-x^2f(x)$	$\frac{2}{\pi}F''(s)$
9.	$f''(x)$	$-s^2F(s)+\frac{2}{\pi}s\cdot f(0)$

Таблица 3

Косинус–преобразование Фурье

$f(x)=\int_0^{\infty} F(s)\cos(sx)ds$ $0<x<\infty$	$F(s)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos(sx)dx$ $0<s<\infty$
№	$f(x)$	$F(s)$
1.	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
2.	e^{-ax}	$\frac{2a}{\pi(a^2+s^2)}$
3.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi s}}$
4.	e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{s^2}{4a}}$
5.	$\frac{a}{x^2+a^2}$	e^{-as}
6.	$-x^2 f(x)$	$\frac{2}{\pi}F''(s)$
7.	$f''(x)$	$-s^2F(s)-\frac{2}{\pi}f'(0)$

Таблица 4

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
Казахстанско-Российский университет
Объем 9,1 п.л. Тираж 337.